

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

1. Haupttest (FR, 15.11.2019) *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i>
			<input type="text"/>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 18</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.



• **Aufgabe 1.**

a) (2,5 Punkte) Gegeben seien zwei Unterräume des \mathbb{R}^4 ,

$$\begin{aligned} U &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_3 = 0, \quad 2 \cdot x_1 = x_4 \} \quad \text{und} \\ W &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_2 = 0 \}. \end{aligned}$$

Finden Sie jeweils eine Basis und bestimmen Sie die Dimensionen von U und W !

Aus den Gleichungen der Definition von U erhält man $x_1 = -x_3$. Zusammen mit $2 \cdot x_1 = x_4$ ist eine mögliche Basis gegeben durch

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Anzahl der Elemente einer Basis entspricht der Dimension dieses Raumes, also

$$\dim(U) = 2.$$

Selbiges wird mit W durchgeführt, man erhält aus $x_2 = 0$ eine mögliche Basis durch

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Diese Basis hat drei Elemente, folglich ist $\dim(W) = 3$.

- b) (1,5 Punkte) Die Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, die im Durchschnitt $U \cap W$ liegen, erfüllen die Bedingungen für U und W , die in a) spezifiziert sind. Geben Sie die Definition von $U \cap W$ in folgender Form an:

$$U \cap W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \dots\}.$$

Bestimmen Sie außerdem eine Basis und die Dimension von $U \cap W$!

(Dies soll **nicht** die allgemeine Definition der Form $U \cap W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{x} \in U, \mathbf{x} \in W\}$ sein.)

Die Mengendefinition der Schnittmenge zweier Mengen ist einfach die Kombination beider Mengendefinitionen, also

$$U \cap W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_3 = 0, \quad 2 \cdot x_1 = x_4, \quad x_2 = 0\}.$$

Die Menge $U \cap W$ wird durch drei Gleichungen definiert, Umformen ergibt

$$x_1 = -x_3, \quad 2 \cdot x_1 = x_4, \quad x_2 = 0.$$

Das sind drei linear unabhängige Gleichungen, das ergibt genau einen Basisvektor. Eine mögliche Basis ist damit

$$\mathbf{B}_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Folglich ist $\dim(U \cap W) = 1$.

c) (1 Punkt) Bestimmen Sie aus dem Dimensionssatz die Dimension von $U + W$!

Der Dimensionssatz für Unterräume (Satz 1.12) lautet

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W),$$

also $\dim(U + W) = 2 + 3 - 1 = 4$.

d) (1 Punkt) Gegeben sei die Menge

$$T = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 \neq x_3 + x_4\}.$$

Überprüfen Sie, ob T einen Unterraum von \mathbb{R}^4 darstellt!

Zu überprüfen ist allgemein das Unterraumkriterium. Hier genügt allerdings einen einfachen Widerspruch anzugeben:

$$\text{Wähle } \mathbf{x} \in T, \quad s = 0$$

$$s \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad s \cdot x_1 + s \cdot x_2 = 0 + 0 = 0 = s \cdot x_3 + s \cdot x_4 \quad \Rightarrow \quad s \cdot \mathbf{x} \notin T.$$

Dies verletzt Punkt b) des Unterraumkriteriums, folglich ist T kein Unterraum des \mathbb{R}^4 .

- **Aufgabe 2.** Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in \mathbb{R}^3$ und ein Vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$, der als Linearkombination von $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ und \mathbf{b}_3 dargestellt werden soll,

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

- a) (3 Punkte) Berechnen Sie den Rang von B, $B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$, und den Rang der erweiterten Matrix $(B|\mathbf{v})$. Sind die Vektoren \mathbf{b}_i linear unabhängig und stellen sie eine Basis des \mathbb{R}^3 dar?

(Rechnen Sie mit Bruchzahlen, wenn notwendig!)

Damit B eine Basis des \mathbb{R}^3 ist, müssen die gegebenen Vektoren $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ linear unabhängig sein. Folgende Bedingung muss für lineare Unabhängigkeit erfüllt sein

$$s_1 \cdot \mathbf{b}_1 + s_2 \cdot \mathbf{b}_2 + s_3 \cdot \mathbf{b}_3 = \mathbf{0}, \quad \text{mit } s_1, s_2, s_3 = 0.$$

Nun überprüfen wir die lineare Unabhängigkeit durch Anwenden des Gauß-Algorithmus.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -7 & 16 \\ 0 & 2 & -4 & 10 \\ 8 & -5 & -11 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\frac{1}{3}z_1 \\ \frac{1}{2}z_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 8 & -5 & -11 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{z_3 - 8z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -\frac{31}{3} & \frac{23}{3} & -\frac{116}{3} \end{array} \right) \xrightarrow{z_3 + \frac{31}{3}z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -13 & 13 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{13}z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Daraus folgt, dass $\text{Rang}(B) = \text{Rang}(B|\mathbf{v}) = 3$. Damit wurde gezeigt, dass $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ linear unabhängig sind und eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden.

- b) (3 Punkte) Berechnen Sie die Koordinaten des Vektors $\mathbf{v} = (16, 10, 4)^T$ bezüglich der Basis B , d.h. berechnen Sie die Darstellung von \mathbf{v} bezüglich $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$!

Die Koordinaten $[\mathbf{v}]_B = (v_1, v_2, v_3)^T$ sollen gesucht werden. Dabei gilt $\mathbf{v} = B[\mathbf{v}]_B$. Daraus folgt

$$\mathbf{v} = v_1 \cdot \mathbf{b}_1 + v_2 \cdot \mathbf{b}_2 + v_3 \cdot \mathbf{b}_3.$$

Die Lösung dieses inhomogenen Gleichungssystems kann mittels des Gauß-Verfahrens erfolgen. Dabei wird $(B|\mathbf{v})$ gelöst,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

Dies kann aufgelöst werden zu

$$\begin{aligned} v_1 + \frac{2}{3}v_2 - \frac{7}{3}v_3 &= \frac{16}{3}, \\ v_2 - 2v_3 &= 5, \\ v_3 &= -1. \end{aligned}$$

Das Endergebnis sind die Koordinaten von \mathbf{v} bezüglich der Basis B ,

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- c) (1 Zusatzpunkt) Gegeben sei $V = \mathbb{R}_2$, der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 , und seine Basis, $Q = \{q_1(x), q_2(x), q_3(x)\}$ mit

$$\begin{aligned}q_1(x) &= x^2 + 2, \\q_2(x) &= -2x^2 + x - 3, \\q_3(x) &= ax^2 + bx + c.\end{aligned}$$

Gegeben sei das Polynom $p(x) = 2x^2 - 3x + 5 \in \mathbb{R}_2$.

Die Koordinaten von p bezüglich der Basis Q lauten $[p]_Q = (2, 1, -1)^T$. Bestimmen Sie das Basispolynom $q_3(x)$, also berechnen Sie a , b und c !

(Hinweis: $p(x) = \alpha_1 q_1(x) + \alpha_2 q_2(x) + \alpha_3 q_3(x)$, mit $[p]_Q = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$)

Aus $p(x) = \alpha_1 q_1(x) + \alpha_2 q_2(x) + \alpha_3 q_3(x)$ mit $[p]_Q = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

folgt

$$2x^2 - 3x + 5 = 2(x^2 + 2) + 1(-2x^2 + x - 3) - 1(ax^2 + bx + c).$$

Um eine Lösung für a, b, c zu finden, wird ein Koeffizientenvergleich durchgeführt,

$$\begin{aligned}x^0 : \quad & 5 = 4 - 3 - c, \\x^1 : \quad & -3 = 1 - b, \\x^2 : \quad & 2 = 2 - 2 - a.\end{aligned}$$

Aus dem Koeffizientenvergleich folgt $a = -2, b = 4, c = -4$ bzw.

$$q_3(x) = ax^2 + bx + c = -2x^2 + 4x - 4.$$

- **Aufgabe 3.** Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit $r \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 - 9x_4 &= 3 \\ -2x_1 + 6x_3 + 10x_4 &= -4 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + (3-r)x_4 &= -2 \\ 2x_1 - 7x_2 + rx_3 + 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

- a) (0.5 Punkte) Geben Sie die Koeffizientenmatrix A und die Inhomogenität \mathbf{b} des Gleichungssystems an!

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 & -9 \\ -2 & 0 & 6 & 10 \\ -1 & 1 & 3 & 3-r \\ 2 & -7 & r & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- b) (1.5 Punkte) Führt man den Gauß Algorithmus an der erweiterten Matrix korrekt durch, so ergibt sich

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -r & -1 \\ 0 & 0 & 0 & (r+1)(r-2) & r+1 \end{array} \right).$$

Bestimmen Sie den Rang von A und den Rang der erweiterten Matrix $(A|\mathbf{b})$ in Abhängigkeit von r . Für welche Werte von $r \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem keine Lösung, eine eindeutige Lösung, unendlich viele Lösungen? Begründen Sie Ihre Ergebnisse!

Es können folgende Fälle unterschieden werden

- $r = 2$: $\text{Rang}(A) = 3, \text{Rang}(A|\mathbf{b}) = 4 \rightarrow \text{Rang}(A) \neq \text{Rang}(A|\mathbf{b})$
- $r = -1$: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|\mathbf{b}) = 3$
- $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|\mathbf{b}) = 4$.

Für den Fall, dass $r = 2$ ist, hat das Gleichungssystem keine Lösung, da $\text{Rang}(A) \neq \text{Rang}(A|\mathbf{b})$. Für $r = -1$ gibt es eine eindimensionale Lösungsschar mit unendlich vielen Lösungen. Für alle anderen Fälle, also für $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, gibt es eine eindeutige Lösung abhängig von r .

- c) (4 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für alle Fälle aus Unterpunkt b) in Abhängigkeit von r . Führen Sie für den Fall unendlich vieler Lösungen auch explizit den Kern(A), dessen Bedeutung und Dimension an!

Die allgemeine Lösung ergibt sich aus der Lösung des Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Aus der reduzierten Matrix aus Unterpunkt b) lässt sich diese leichter berechnen.

- Fall 2: $r = -1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Somit gibt es drei Gleichungen für vier Unbekannte, wodurch die Abhängigkeit der Unbekannten von einem Parameter, z.B. $x_4 \in \mathbb{R}$ ausgedrückt werden kann.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 1, \\ x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1, \\ x_3 + x_4 &= -1. \end{aligned}$$

Dies kann umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4, \\ x_2 &= 1 + x_3 + 2x_4, \\ x_3 &= -1 - x_4. \end{aligned}$$

Somit können x_1 , x_2 und x_3 durch x_4 ausgedrückt werden. Daher wird $x_4 = \tau$ gewählt. Einsetzen von τ führt zu folgenden Lösungen für die Unbekannten

$$\begin{aligned} x_3 &= -1 - \tau, \\ x_2 &= \tau, \\ x_1 &= -1 + 2\tau. \end{aligned}$$

Allgemein gilt, dass der Kern(A) die Lösung des homogenen Gleichungssystems, also von $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ist. Weiters gilt, dass die Dimension des Kerns gleich der Anzahl der Unbekannten minus des Rangs von A ist, also: $\dim\text{Kern}(A) = n - \text{Rang}(A)$

Damit folgt für die allgemeine Lösung

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

$$\text{mit } \text{Kern}(A) = \tau \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \dim\text{Kern}(A) = 1.$$

- Fall 3: $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -r & -1 \\ 0 & 0 & 0 & (r+1)(r-2) & r+1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{z_4 \\ (r+1)(r-2)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -r & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{r-2} \end{array} \right).$$

Dieses Gleichungssystem ist eindeutig bestimmt und kann durch Rückwärtseinsetzen gelöst werden. Das führt zu folgender Lösung

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{1}{r-2}, \\ x_3 &= -1 + rx_4 = \frac{2}{r-2}, \\ x_2 &= 1 + x_3 + 2x_4 = \frac{r+2}{r-2}, \\ x_1 &= 1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = \frac{2r+7}{r-2}. \end{aligned}$$

Der eindeutige Lösungsvektor sieht wie folgt aus

$$\mathbf{x} = \frac{1}{r-2} \begin{pmatrix} 7+2r \\ r+2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}.$$