Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
WS 2019

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

1. Haupttest (FR, 15.11.2019) *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden ***Kästchen*** **eingetragenen Antworten.**

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. □

• **Aufgabe 1.** Gegeben seien die Vektoren $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3 \in \mathbb{R}^3$ und ein Vektor $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$, der als Linearkombination von $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ und $\boldsymbol{b}_3$ dargestellt werden soll,

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

a) (3 Punkte) Berechnen Sie den Rang von B, B$=\begin{pmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$, und den Rang der erweiterten Matrix (B$|\boldsymbol{v}$). Sind die Vektoren $\boldsymbol{b}_i$ linear unabhängig und stellen sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ dar?

(Rechnen Sie mit Bruchzahlen, wenn notwendig!)

Damit B eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist, müssen die gegebenen Vektoren $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ linear unabhängig sein. Folgende Bedingung muss für lineare Unabhängigkeit erfüllt sein

$$s_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + s_2 \cdot \boldsymbol{b}_2 + s_3 \cdot \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0}, \quad \text{mit} \quad s_1, s_2, s_3 = 0 .$$

Nun überprüfen wir die lineare Unabhängigkeit durch Anwenden des Gauß-Algorithmus.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}\boldsymbol{z}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\boldsymbol{z}_2 - 3\boldsymbol{z}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-2)\boldsymbol{z}_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\boldsymbol{z}_3 - \boldsymbol{z}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{5}\boldsymbol{z}_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Daraus folgt, dass Rang(B) = Rang(B$|\boldsymbol{v}$) = 3. Damit wurde gezeigt, dass $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ linear unabhängig sind und eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) (3 Punkte) Berechnen Sie die Koordinaten des Vektors $\boldsymbol{v} = (-4, 8, 1)^T$ bezüglich der Basis B, d.h. berechnen Sie die Darstellung von $\boldsymbol{v}$ bezüglich $\mathrm{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$!

Die Koordinaten $[\boldsymbol{v}]_B = (v_1, v_2, v_3)^T$ sollen gesucht werden. Dabei gilt $\boldsymbol{v} = B[\boldsymbol{v}]_B$. Daraus folgt

$$\boldsymbol{v} = v_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + v_2 \cdot \boldsymbol{b}_2 + v_3 \cdot \boldsymbol{b}_3 \,.$$

Die Lösung dieses inhomogenen Gleichungssystems kann mittels des Gauß-Verfahrens erfolgen. Dabei wird $(B|\boldsymbol{v})$ gelöst,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) .$$

Dies kann aufgelöst werden zu

$$\begin{aligned} v_1 - \frac{1}{2}v_2 - v_3 &= 2 \,, \\ v_2 - 2v_3 &= -4 \,, \\ v_3 &= 1 \,. \end{aligned}$$

Das Endergebnis sind die Koordinaten von $\boldsymbol{v}$ bezüglich der Basis B,

$$[\boldsymbol{v}]_B = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

c) (1 Zusatzpunkt) Gegeben sei V=$\mathbb{R}_2$, der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2, und seine Basis, Q=$\{q_1(x), q_2(x), q_3(x)\}$ mit

$$\begin{aligned} q_1(x) &= -2x^2 + x\,, \\ q_2(x) &= 3x^2 + 2x - 1\,, \\ q_3(x) &= ax^2 + bx + c\,. \end{aligned}$$

Gegeben sei das Polynom $p(x) = x^2 - 4x + 3 \in \mathbb{R}_2$.

Die Koordinaten von p bezüglich der Basis Q lauten $[p]_Q = (-3, 1, -1)^T$. Bestimmen Sie das Basispolynom $q_3(x)$, also berechnen Sie a, b und c!

(Hinweis: $p(x) = \alpha_1 q_1(x) + \alpha_2 q_2(x) + \alpha_3 q_3(x)$, mit $[p]_Q = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$)

Aus $p(x) = \alpha_1 q_1(x) + \alpha_2 q_2(x) + \alpha_3 q_3(x)$ mit $[p]_Q = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

folgt

$$x^2 - 4x + 3 = -3(-2x^2 + x) + 1(3x^2 + 2x - 1) - 1(ax^2 + bx + c)\,.$$

Um eine Lösung für a,b,c zu finden, wird ein Koeffizientenvergleich durchgeführt,

$$\begin{aligned} x^0: &\quad 3 = -1 - c\,, \\ x^1: &\quad -4 = -3 + 2 - b\,, \\ x^2: &\quad 1 = 6 + 3 - a\,. \end{aligned}$$

Aus dem Koeffizientenvergleich folgt $a = 8, b = 3, c = -4$ bzw.

$$q_3(x) = ax^2 + bx + c = 8x^2 + 3x - 4\,.$$

- **Aufgabe 2.** Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit $r \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 2rx_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & (1+2r)x_4 & = & -4 \\ (r+1)x_1 & - & (r+1)x_2 & + & (3r+3)x_3 & - & 4x_4 & = & 3r-1 \end{array}$$

a) (0.5 Punkte) Geben Sie die Koeffizientenmatrix A und die Inhomogenität $\boldsymbol{b}$ des Gleichungssystems an!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2r \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1+2r \\ r+1 & -r-1 & 3r+3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ 3r-1 \end{pmatrix}.$$

b) (1.5 Punkte) Führt man den Gauß Algorithmus an der erweiterten Matrix korrekt durch, so ergibt sich

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -2r & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & (r-1)(r+2) & r-1 \end{array}\right).$$

Bestimmen Sie den Rang von A und den Rang der erweiterten Matrix $(A|\boldsymbol{b})$ in Abhängigkeit von r. Für welche Werte von $r \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem keine Lösung, eine eindeutige Lösung, unendlich viele Lösungen? Begründen Sie Ihre Ergebnisse!

Es können folgende Fälle unterschieden werden

- $r = -2$: $\text{Rang}(A) = 3, \text{Rang}(A|\boldsymbol{b}) = 4 \rightarrow \text{Rang}(A) \neq \text{Rang}(A|b)$
- $r = 1$: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|\boldsymbol{b}) = 3$
- $r \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 1\}$: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|\boldsymbol{b}) = 4$.

Für den Fall, dass $r = -2$ ist, hat das Gleichungssystem keine Lösung, da $\text{Rang}(A) \neq \text{Rang}(A|b)$. Für $r = 1$ gibt ergibt sich eine eindimensionale Lösungsschar mit unendlich vielen Lösungen. Für alle anderen Fälle, also für $r \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 1\}$, gibt es eine eindeutige Lösung abhängig von r.

c) (4 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für alle Fälle aus Unterpunkt b) in Abhängigkeit von r. Führen Sie für den Fall unendlich vieler Lösungen auch explizit den $\mathrm{Kern}(A)$, dessen Bedeutung und Dimension an!

Die allgemeine Lösung ergibt sich aus der Lösung des Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Aus der reduzierten Matrix aus Unterpunkt b) lässt sich diese leichter berechnen.

- Fall 2: $r = 1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Somit gibt es drei Gleichungen für vier Unbekannte, wodurch die Abhängigkeit der Unbekannten von einem Parameter, z.B. $x_4 \in \mathbb{R}$ ausgedrückt werden kann.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 1\,, \\ x_2 - x_3 - 3x_4 &= 4\,, \\ x_3 + x_4 &= -3\,. \end{aligned}$$

Dies kann umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4\,, \\ x_2 &= 4 + x_3 + 3x_4\,, \\ x_3 &= -3 - x_4\,. \end{aligned}$$

Somit können x_1, x_2 und x_3 durch x_4 ausgedrückt werden. Daher wird $x_4 = \tau$ gewählt. Einsetzen von τ führt zu folgenden Lösungen für die Unbekannten

$$\begin{aligned} x_3 &= -3 - \tau\,, \\ x_2 &= 1 + 2\tau\,, \\ x_1 &= 11 + 7\tau\,. \end{aligned}$$

Allgemein gilt, dass der Kern(A) die Lösung des homogenen Gleichungssystems, also von A$\boldsymbol{x}$ = $\mathbf{0}$, ist. Weiters gilt, dass die Dimension des Kerns gleich der Anzahl der Unbekannten minus des Rangs von A ist, also: $\dim \mathrm{Kern}(A) = n$ - $\mathrm{Rang}(A)$

Damit folgt für die allgemeine Lösung

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

$$\text{mit} \quad \mathrm{Kern}(A) = \tau \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \dim\mathrm{Kern}(A) = 1\,.$$

- Fall 3: $r \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 1\}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -2r & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & (r-1)(r+2) & r-1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{\boldsymbol{z}_4}{(r-1)(r+2)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -2r & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{r+2} \end{array}\right).$$

Dieses Gleichungssystem ist eindeutig bestimmt und kann durch Rückwärtseinsetzen gelöst werden. Das führt zu folgender Lösung

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{1}{r+2}\,, \\ x_3 = -3 - x_4 &= \frac{-7-3r}{r+2}\,, \\ x_2 = 4 + x_3 + 3x_4 &= \frac{r+4}{r+2}\,, \\ x_1 = 1 + x_2 - 3x_3 + 2rx_4 &= \frac{13r+27}{r+2}\,. \end{aligned}$$

Der eindeutige Lösungsvektor sieht wie folgt aus

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{r+2} \begin{pmatrix} 13r+27 \\ r+4 \\ -7-3r \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}\backslash\{1, 3\}\,.$$

- **Aufgabe 3.**

a) (2,5 Punkte) Gegeben seien zwei Unterräume des $\mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned} U &= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\} \quad \text{und} \\ W &= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 0, \quad 4 \cdot x_2 + x_4 = 0\right\}. \end{aligned}$$

Finden Sie jeweils eine Basis und bestimmen Sie die Dimensionen von U und W!

Aus der Gleichung der Definition von U erhält man $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4$. Damit ist eine mögliche Basis gegeben durch

$$\boldsymbol{B_U} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Anzahl der Elemente einer Basis entspricht der Dimension dieses Raumes, also

$$\dim(U) = 3.$$

Selbiges wird mit W durchgeführt, man erhält aus $x_1 = 0$ und $4 \cdot x_2 = -x_4$ eine mögliche Basis durch

$$\boldsymbol{B_W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Diese Basis hat drei Elemente, folglich ist $\dim(W) = 2$.

b) (1,5 Punkte) Die Vektoren $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, die im Durchschnitt $U \cap W$ liegen, erfüllen die Bedingungen für U und W, die in a) spezifiziert sind. Geben Sie die Definition von $U \cap W$ in folgender Form an:

$$U \cap W \quad = \quad \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 : ... \right\}.$$

Bestimmen Sie außerdem eine Basis und die Dimension von $U \cap W$!

(Dies soll **nicht** die allgemeine Definition der Form $U \cap W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 : \boldsymbol{x} \in U, \boldsymbol{x} \in W\}$ sein.)

Die Mengendefinition der Schnittmenge zweier Mengen ist einfach die Kombination beider Mengendefinitionen, also

$$U \cap W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \quad x_1 = 0, \quad 4 \cdot x_2 + x_4 = 0 \right\}.$$

Die Menge $U \cap W$ wird durch drei Gleichungen definiert, Umformen ergibt

$$5 \cdot x_2 = -x_3, \quad x_1 = 0, \quad 4 \cdot x_2 = -x_4.$$

Das sind drei linear unabhängige Gleichungen, das ergibt genau einen Basisvektor. Eine mögliche Basis ist damit

$$\boldsymbol{B_{U \cap W}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Folglich ist $\dim(U \cap W) = 1$.

c) (1 Punkt) Bestimmen Sie aus dem Dimensionsatz die Dimension von $U + W$!

Der Dimensionssatz für Unterräume (Satz 1.12) lautet

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W),$$

also $\dim(U + W) = 3 + 2 - 1 = 4$.

d) (1 Punkt) Gegeben sei die Menge

$$T = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_4 \neq x_3 \right\}.$$

Überprüfen Sie, ob T einen Unterraum von $\mathbb{R}^4$ darstellt!

Zu überprüfen ist allgemein das Unterraumkriterium. Hier genügt allerdings, einen einfachen Widerspruch anzugeben:

$$\text{Wähle} \quad \boldsymbol{x} \in T, \quad s = 0$$

$$s \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad s \cdot x_1 + s \cdot x_2 = 0 + 0 = 0 = s \cdot x_3 + s \cdot x_4 \quad \Rightarrow \quad s \cdot \boldsymbol{x} \notin T.$$

Dies verletzt Punkt b) des Unterraumkriteriums, folglich ist T kein Unterraum des $\mathbb{R}^4$.