

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

2. Haupttest (FR, 17.01.2020) *(mit Lösung)*

— Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min. —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i>
			<input type="text"/>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 18</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.



• **Aufgabe 1.**

Betrachten Sie den Raum $V = C([0, \infty); \mathbb{R})$, ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_0^\infty f(x) \cdot g(x) \cdot e^{-2x} dx. \quad (1)$$

Weiters sei $U := \{u_1, u_2\} = \{x - 2, 3x - 4\}$ gegeben.

- a) (3 Punkte) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis des von U aufgespannten Unterraums von V .
Hinweis: Sie dürfen die folgenden Integrale verwenden: $\int_0^\infty 1 \cdot e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$, $\int_0^\infty x \cdot e^{-ax} dx = \frac{1}{a^2}$ und $\int_0^\infty x^2 \cdot e^{-ax} dx = \frac{2}{a^3}$.

Wir berechnen als Vorbereitung die folgenden Integrale, da diese im Laufe des Beispiels häufiger benötigt werden. Die explizite Berechnung der im Hinweis angeführten Integrale ist für eine volle Punktzahl selbstverständlich nicht notwendig, wird hier jedoch für den interessierten Leser durchgeführt.

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^\infty 1 \cdot e^{-ax} dx = -\frac{1}{a} e^{-ax} \Big|_0^\infty = -\frac{1}{a} (\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-ax} - 1) = \frac{1}{a} \\ II &:= \int_0^\infty x \cdot e^{-ax} dx \stackrel{PI}{=} -\frac{1}{a} e^{-ax} \cdot x \Big|_0^\infty + \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-ax} dx \stackrel{I}{=} -\frac{1}{a} (\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-ax} - 0) + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2} \\ III &:= \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-ax} dx \stackrel{PI}{=} -\frac{1}{a} e^{-ax} \cdot x^2 \Big|_0^\infty + \frac{2}{a} \int_0^\infty x \cdot e^{-ax} dx \stackrel{II}{=} -\frac{1}{a} (\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot e^{-ax} - 0) + \frac{1}{a} \cdot 2 \cdot \frac{1}{a^2} \\ &= \frac{2}{a^3} \end{aligned}$$

Zur Berechnung der gesuchten ONB führen wir das Verfahren von Gram-Schmidt durch. Zuerst bemerken wir, dass die Vektoren u_1 und u_2 offensichtlich linear unabhängig sind, weshalb der Raum U zweidimensional ist. Wir suchen also eine aus zwei Vektoren bestehende ONB. Analog zur Übung sollen im Folgenden die Vektoren der neuen Basis mit $w_{1,2}$ bezeichnet werden, sofern sie noch nicht normiert sind und mit $\tilde{w}_{1,2}$, wenn sie bereits normiert sind.

Wir wählen $w_1 := u_1 = x - 2$ als ersten Vektor. Dieser muss noch normiert werden.

$$\begin{aligned} \|w_1\|^2 &= \langle w_1, w_1 \rangle = \int_0^\infty (x - 2)^2 e^{-2x} dx = \int_0^\infty (x^2 - 4x + 4) e^{-2x} dx \stackrel{I, II, III}{=} 1 \cdot \frac{2}{2^3} - 4 \cdot \frac{1}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{2 - 8 + 16}{8} = \frac{5}{4} \Rightarrow \|w_1\| = \sqrt{\frac{5}{4}} \end{aligned}$$

Somit erhalten wir $\tilde{w}_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5}(x - 2)$.

Wir erhalten einen auf \tilde{w}_1 orthogonalen Vektor durch

$$w_2 = u_2 - \frac{\langle \tilde{w}_1, u_2 \rangle}{\langle \tilde{w}_1, \tilde{w}_1 \rangle} \tilde{w}_1,$$

wobei das Skalarprodukt im Nenner eins ergibt, da \tilde{w}_1 bereits normiert ist. Es bleibt also das Skalarprodukt im Zähler zu berechnen.

$$\begin{aligned} \langle \tilde{w}_1, u_2 \rangle &= \int_0^\infty \sqrt{\frac{4}{5}}(x-2) \cdot (3x-4)e^{-2x} dx = \sqrt{\frac{4}{5}} \int_0^\infty (3x^2 - 10x + 8)e^{-2x} dx \\ &\stackrel{I,II,III}{=} \sqrt{\frac{4}{5}} \left(3 \cdot \frac{2}{8} - 10 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{2} \right) = \sqrt{\frac{4}{5}} \frac{6 - 20 + 32}{8} = \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$w_2 = 3x - 4 - \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot \frac{9}{4} \sqrt{\frac{4}{5}}(x-2) = \frac{15x - 20 - 9x + 18}{5} = \frac{6x - 2}{5} = \frac{2}{5}(3x - 1).$$

Nun gilt es nur mehr w_2 zu normieren.

$$\begin{aligned} \|w_2\|^2 = \langle w_2, w_2 \rangle &= \frac{4}{25} \int_0^\infty (3x-1)^2 e^{-2x} dx = \frac{4}{25} \int_0^\infty (9x^2 - 6x + 1)e^{-2x} dx \\ &\stackrel{I,II,III}{=} \frac{4}{25} \left(9 \cdot \frac{2}{8} - 6 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{4}{25} \frac{18 - 12 + 4}{8} = \frac{1}{5} \Rightarrow \|w_2\| = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Somit ist $\tilde{w}_2 = \frac{2\sqrt{5}}{5}(3x-1)$. Die gesuchte ONB lautet also

$$ONB = \left\{ \frac{2\sqrt{5}}{5}(x-2), \frac{2\sqrt{5}}{5}(3x-1) \right\}.$$

- b) (3 Punkte) Gegeben sei $v(x) := 2x - \frac{10}{3}$. Berechnen Sie die Orthogonalprojektion von v auf U . Interpretieren Sie das Ergebnis!

Wir berechnen

$$\begin{aligned}\langle v, \tilde{w}_1 \rangle &= \int_0^\infty \frac{2\sqrt{5}}{5}(x-2) \cdot \left(2x - \frac{10}{3}\right) e^{-2x} dx = \frac{4\sqrt{5}}{5} \int_0^\infty \left(x^2 - \frac{11}{3}x + \frac{10}{3}\right) e^{-2x} dx \\ &\stackrel{I,II,III}{=} \frac{4\sqrt{5}}{5} \left(1 \cdot \frac{2}{8} - \frac{11}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{4\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\langle v, \tilde{w}_2 \rangle &= \int_0^\infty \frac{2\sqrt{5}}{5}(3x-1) \cdot (2x - 10/3) e^{-2x} dx = \frac{4\sqrt{5}}{5} \int_0^\infty \left(3x^2 - 6x + \frac{5}{3}\right) e^{-2x} dx \\ &\stackrel{I,II,III}{=} \frac{4\sqrt{5}}{5} \cdot \left(3 \cdot \frac{2}{8} - 6 \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}}{15}\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\langle v, \tilde{w}_1 \rangle \cdot \tilde{w}_1 + \langle v, \tilde{w}_2 \rangle \cdot \tilde{w}_2 = \frac{4\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}(x-2) + \frac{\sqrt{5}}{15} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}(3x-1) = 2x - \frac{10}{3}.$$

Somit stimmt die Orthogonalprojektion von v auf U mit v überein. v kann als Linearkombination von \tilde{w}_1 und \tilde{w}_2 geschrieben werden, liegt also bereits in U !

• **Aufgabe 2.**

Eine lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \quad \varphi(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2, \quad \varphi(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1. \quad (2)$$

Dabei bezeichnen \mathbf{e}_i für $i = 1, 2, 3$ die Basisvektoren der kanonischen Basis E_3 des \mathbb{R}^3 .

- a) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Matrix $A = [\varphi(E_3)]_{E_3}$ der linearen Abbildung φ und geben Sie $\varphi(\mathbf{x})$, für $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, an.

Die Matrix der linearen Abbildung φ erhält man, indem man die Bilder der Basisvektoren \mathbf{e}_i als Spalten der Matrix auffasst. Dies ergibt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Weiters erhält man

$$\varphi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_3 \\ x_1 - 4x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}.$$

- b) (3 Punkte) Weiters sei eine Basis $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ des \mathbb{R}^3 durch

$$\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1)^T, \quad \mathbf{b}_2 = (1, 1, 0)^T, \quad \mathbf{b}_3 = (1, 0, 0)^T,$$

gegeben, sowie der Vektor $\mathbf{v} = (1, 2, 3)^T$. Berechnen Sie die Transformationsmatrix $T = T_{B \leftarrow E_3}$, sowie die Koordinatenvektoren $[\mathbf{v}]_B$ und $[\varphi(\mathbf{v})]_B$.

Die Basisvektoren von B bilden die Spalten der Transformationsmatrix $T_{E_3 \leftarrow B}$, um damit die Transformationsmatrix $T = T_{B \leftarrow E_3}$ zu berechnen, gibt es zwei Wege.

Im ersten Weg sieht man, dass der Zusammenhang der Basisvektoren von E_3 und B durch

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= 0\mathbf{b}_1 + 0\mathbf{b}_2 + 1\mathbf{b}_3, \\ \mathbf{e}_2 &= 0\mathbf{b}_1 + 1\mathbf{b}_2 - 1\mathbf{b}_3, \\ \mathbf{e}_3 &= 1\mathbf{b}_1 - 1\mathbf{b}_2 + 0\mathbf{b}_3, \end{aligned}$$

gegeben ist und man erhält lt. Definition 3.3 die Transformationsmatrix zu

$$T = T_{B \leftarrow E_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der zweite Weg geht von $T_{E_3 \leftarrow B}[\mathbf{b}_i] = \mathbf{e}_i$, für $i = 1, 2, 3$, aus und löst diese 3 Gleichungssysteme simultan in der Form

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) = (I_3 | T_{B \leftarrow E_3}).$$

Mit $T_{B \leftarrow E_3}$ berechnet sich nun

$$[\mathbf{v}]_B = T_{B \leftarrow E_3} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

sowie

$$[\varphi(\mathbf{v})]_B = T_{B \leftarrow E_3} A \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

c) (2 Punkte) Berechnen Sie $[\varphi(B)]_B$.

Es gilt der Zusammenhang

$$[\varphi(\mathbf{v})]_B = [\varphi(B)]_B [\mathbf{v}]_B = T_{B \leftarrow E_3} A T_{E_3 \leftarrow B} [\mathbf{v}]_B$$

und daher ist

$$\begin{aligned} [\varphi(B)]_B &= T_{B \leftarrow E_3} A T_{E_3 \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- **Aufgabe 3.** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

- a) (1,5 Punkte) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und geben Sie die Bedingung für die Eigenwerte an. Vereinfachen Sie soweit wie möglich!

Das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ ergibt sich per Definition aus

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1 - \lambda)(-4 - \lambda)(5 - \lambda) - (-1 - \lambda) \cdot 3 \cdot (-6) = (-1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2).$$

Die Eigenwerte sind genau die Nullstellen dieses Polynoms, also $p(\lambda) \stackrel{!}{=} 0$.

- b) (3,5 Punkte) Die Eigenwerte sind $\lambda_{1,2} = -1$ und $\lambda_3 = 2$. Geben Sie algebraische und geometrische Vielfachheiten an und bestimmen Sie die Eigenvektoren und ggf. die Hauptvektoren!

$$\lambda_{1,2} = -1, \quad n_1 = 2, \quad 1 \leq g_1 \leq 2:$$

$$(A - \lambda_1 I) \cdot \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \neq 0. \text{ Für } s = 1 \text{ folgt}$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Rang der Matrix $(A - \lambda_1 I)$ ist 2, damit ist die geometrische Vielfachheit $g_1 = 1$ und es gibt einen Hauptvektor

$$(A - \lambda_1 I) \cdot \mathbf{h}_1 = \mathbf{v}_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Für } t = 0 \text{ folgt } \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_3 = 2 \quad n_3 = g_3 = 1:$$

$$(A - \lambda_3 I) \cdot \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_3 = s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s \neq 0. \text{ Für } s = 1 \text{ folgt}$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



- c) (1 Punkt) Geben Sie die Jordan'sche Normalform J und die Transformationsmatrix X , für die $AX = XJ$ gilt, an!

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

