

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

1. Haupttest (FR, 23.11.2020) *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i>
			<input type="text"/>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 6</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

• **Aufgabe 1.** (2 Punkte)

a) Betrachten Sie die Mengen

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + 5x_3 = 0, \quad x_4 = 1\}$$

$$\mathcal{B} = \left\{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + 4x_3 = 0, \quad 2x_3 - \sqrt{3}x_4 = 0\right\}.$$

Welche dieser Räume sind Unterräume von \mathbb{R}^4 ? Argumentieren Sie sorgfältig!

Man prüft leicht mittels Unterraumkriterium nach, dass \mathcal{B} ein Unterraum ist.

Wir zeigen, dass das Unterraumkriterium für \mathcal{A} verletzt ist. Dazu betrachtet man:

$$(u_4 + v_4) = 1 + 1 = 2 \neq 1.$$

Das Unterraumkriterium ist also verletzt, somit ist \mathcal{A} kein Unterraum!

b) Betrachten Sie nun die Mengen

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + x_3 = 0, \quad x_3 - x_4 = 0\}$$
$$\mathcal{T} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_2 = 0\}.$$

Finden Sie jeweils eine Basis von \mathcal{S} und von \mathcal{T} und geben Sie die Dimensionen der beiden Räume an. Sie müssen nicht nachprüfen, ob es sich bei diesen Mengen tatsächlich um Unterräume handelt!

Aus den definierenden Gleichungen für \mathcal{S} erhält man $x_1 = -\frac{x_4}{2}$, $x_3 = x_4$. Damit folgt

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x_4}{2} \\ x_2 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_x \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit lautet eine Basis $B_{\mathcal{S}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und wir erhalten $\dim(\mathcal{S}) = 2$. Man liest

unmittelbar ab: $B_{\mathcal{T}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und $\dim(\mathcal{T}) = 3$.

c) Ist $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ eine direkte Summe?

Falls ja, begründen Sie warum und verifizieren Sie den Dimensionssatz anhand dieses Beispiels. Falls nein, bestimmen Sie den Schnitt $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ und die Dimension von $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ aus dem Dimensionssatz.

Wir überprüfen, ob $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \{0\}$ gilt. Dazu sei $\mathbf{x} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$, also insbesondere $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ und $\mathbf{x} \in \mathcal{T}$. Dann existieren $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, sodass

$$\mathbf{y} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

da die verwendeten Vektoren laut b) eine Basis des jeweiligen Unterraums bilden. Auflösen der vier Gleichungen liefert $a = -\frac{1}{2}e$, $b = e$, $c = e$ und $d = 0$. Setzt man z.B. $e = 1$, so erhält

man $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$ und $c = 1$ und damit $B_{\mathcal{S} \cap \mathcal{T}} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Skalieren wir, wie in der

Angabe in T UWEL verlangt, die erste Komponente auf 1, so erhalten wir

$$B_{\mathcal{S} \cap \mathcal{T}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Daraus ist sofort ersichtlich, dass $\dim(\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) = 1$ gilt. Wir folgern, dass $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ keine direkte Summe sein kann.

Wir erhalten aus dem Dimensionssatz (Satz 1.12)

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{S} + \mathcal{T}) &= \dim(\mathcal{S}) + \dim(\mathcal{T}) - \dim(\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) \\ &= 2 + 3 - 1 = 4. \end{aligned}$$

d.h. wir erhalten, dass $\dim(\mathcal{S} + \mathcal{T}) = 4$. Die drei Basisvektoren von \mathcal{T} sind bereits linear unabhängig. Wir können also die Basis von \mathcal{T} durch Hinzugabe des ersten Basisvektors von \mathcal{S} (jener, der nicht Basis des Schnittes ist) zu einer Basis von $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ erweitern.

- **Aufgabe 2.** (2 Punkte) Gegeben sei die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von φ und dessen Dimension!

Wir formen die Matrix A mittels elementarer Zeilenumformungen um, damit wir erkennen wie viele der Spalten in A linear unabhängig voneinander sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{z_2 - 2z_1 \\ z_3 - 3z_1 \\ z_4 - 3z_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{z_4 - z_2 \\ z_3 \cdot (-\frac{1}{5}) \\ z_2 \cdot (-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{z_1 - 3z_3 \\ z_2 - 5z_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man erkennt, dass beispielsweise die ersten drei Spalten linear unabhängig sind. Eine Basis des Bildes lautet daher

$$B_{\text{Bild}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Dimension des Bildes ist daher $\dim(\text{Bild}(\varphi)) = 3$.

b) Bestimmen Sie nun eine Basis des Kerns von φ und geben Sie auch dessen Dimension an.

Wir bestimmen den Kern aus $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Wir haben bereits in Unterpunkt a) die Matrix A umgeformt. Da die Inhomogenität des nun zu lösenden Gleichungssystems der Nullvektor ist, können wir das Ergebnis aus a) verwenden. Wir betrachten also

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Wir erhalten daraus

$$x_1 = -x_3$$

$$x_2 = -x_3$$

$$x_4 = -x_3$$

und bestimmen eine Basis des Kerns von φ zu $B_{\text{Kern}} = \left\{ \left(\begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right) \right\}$. Skalieren wir die erste

Komponente auf 1, so erhalten wir $B_{\text{Kern}} = \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right) \right\}$

Folglich lautet die Dimension des Kerns $\dim(\text{Kern}(\varphi)) = 1$.

- **Aufgabe 3.** (2 Punkte) Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem mit $z \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}x_1 + (2z + 4)x_2 + (1 - z)x_3 &= 2z + 3 \\(z + 2)x_2 + (z - 1)x_3 &= z + 4 \\(z - 1)x_3 &= 2\end{aligned}$$

- a) Bestimmen Sie die Koeffizientenmatrix A und die Inhomogenität \mathbf{b} des linearen Gleichungssystems.

In einem ersten Schritt lesen wir aus dem linearen Gleichungssystem die entsprechende Koeffizientenmatrix und Inhomogenität ab

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2z + 4 & 1 - z \\ 0 & z + 2 & z - 1 \\ 0 & 0 & z - 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2z + 3 \\ z + 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- b) Führt man den Gauß-Algorithmus durch, erhält man folgende reduzierte Matrixdarstellung der erweiterten Matrix

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & z + 2 & 0 & z + 2 \\ 0 & 0 & z - 1 & 2 \end{array} \right).$$

Für welche Werte von z besitzt das Gleichungssystem keine Lösung, eine eindeutige Lösung und unendliche viele Lösungen? Begründen Sie Ihre Ergebnisse ausführlich mithilfe des Rangs der Koeffizientenmatrix A und der erweiterten Matrix $(A|\mathbf{b})$!

Der durchgeführte Gauß-Algorithmus, um die Matrix auf die reduzierte Form zu bringen, funktioniert wie folgt.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2z + 4 & 1 - z & 2z + 3 \\ 0 & z + 2 & z - 1 & z + 4 \\ 0 & 0 & z - 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{z_1 + z_3 \\ z_2 - z_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2z + 4 & 0 & 2z + 5 \\ 0 & z + 2 & 0 & z + 2 \\ 0 & 0 & z - 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{z_1 - 2z_2} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & z + 2 & 0 & z + 2 \\ 0 & 0 & z - 1 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Wir können folgende Fälle unterscheiden

- $z = 1$: $\text{Rang}(A) = 2, \text{Rang}(A|\mathbf{b}) = 3 \rightarrow \text{Rang}(A) \neq \text{Rang}(A|\mathbf{b})$
- $z = -2$: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|\mathbf{b}) = 2$
- $z \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|\mathbf{b}) = 3$.

Für den Fall, dass $z = 1$ ist, hat das Gleichungssystem keine Lösung, da $\text{Rang}(A) \neq \text{Rang}(A|\mathbf{b})$. Für $z = -2$ ergibt sich eine eindimensionale Lösungsschar mit unendlich vielen Lösungen. Für alle anderen Fälle, also für $z \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$, gibt es eine eindeutige Lösung abhängig von z .

- c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem für alle Fälle aus Unterpunkt a) in Abhängigkeit von z . Bestimmen Sie dafür die allgemeine Lösung für die unterschiedlichen Fälle und geben Sie für den Fall unendlich vieler Lösungen auch explizit den Kern(A), dessen Bedeutung und Dimension an!

- Fall: $z = -2$

Für diesen Fall gibt es unendlich viele Lösungen, also bestimmen wir die allgemeine Lösung, indem wir den Kern der Koeffizientenmatrix A und eine beliebige Partikulärlösung der Gleichung $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ bestimmen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{array} \right).$$

Aus diesem Gleichungssystem folgt $x_1 = 1$ und $x_3 = -\frac{2}{3}$. Allgemein gilt, dass der Kern(A) die Lösung des homogenen Gleichungssystems, also von $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ist. Weiters gilt, dass die Dimension des Kerns gleich der Anzahl der Unbekannten minus des Rangs von A ist, also: $\dim\text{Kern}(A) = n - \text{Rang}(A)$

Wir wählen $x_2 = s$ und geben die allgemeine Lösung des Gleichungssystems an

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R},$$

mit $\text{Kern}(A) = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \dim\text{Kern}(A) = 1.$

- Fall: $z \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$

Für diesen Fall gibt es eine eindeutige Lösung und das bereits umgeformte Gleichungssystem sieht wie folgt aus

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ (z+2)x_2 &= z+2, \\ (z-1)x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Da wir den Fall $z \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$ behandeln, darf die zweite Zeile durch $z+2$ und die dritte Zeile durch $z-1$ dividiert werden, was die folgende eindeutige Lösung des Gleichungssystems ergibt

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{2}{z-1} \end{pmatrix} \quad z \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}.$$