

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

1. Haupttest (FR, 23.11.2020) *(mit Lösung)*

— Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min. —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i>
			<input type="text"/>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 6</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.



• **Aufgabe 1.** (2 Punkte)

a) Betrachten Sie die Mengen

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^4 : 4x_3 + x_4 = 0, \quad 3x_1 + \pi x_2 = 0\}$$

$$\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^4 : 4x_2 + 2x_4 = 0, \quad x_3 = -2\} \dots$$

Welche dieser Räume sind Unterräume von \mathbb{R}^4 ? Argumentieren Sie sorgfältig!

Man prüft leicht mittels Unterraumkriterium nach, dass \mathcal{A} ein Unterraum ist.

Wir zeigen, dass das Unterraumkriterium für \mathcal{B} verletzt ist. Dazu betrachtet man:

$$(u_3 + v_3) = -2 + (-2) = -4 \neq -2.$$

Das Unterraumkriterium ist also verletzt, somit ist \mathcal{B} kein Unterraum!

b) Betrachten Sie nun die Mengen

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_2 - 4x_3 = 0, \quad x_4 + x_2 = 0\}$$
$$\mathcal{T} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 0\}.$$

Finden Sie jeweils eine Basis von \mathcal{S} und von \mathcal{T} und geben Sie die Dimensionen der beiden Räume an. Sie müssen nicht nachprüfen, ob es sich bei diesen Mengen tatsächlich um Unterräume handelt!

Aus den definierenden Gleichungen für \mathcal{S} erhält man $x_3 = \frac{x_2}{4}$, $x_4 = -x_2$. Damit folgt

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{x_2}{4} \\ -x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Damit lautet eine Basis $B_{\mathcal{S}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ und wir erhalten $\dim(\mathcal{S}) = 2$. Man liest

unmittelbar ab: $B_{\mathcal{T}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und $\dim(\mathcal{T}) = 3$.

c) Ist $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ eine direkte Summe?

Falls ja, begründen Sie warum und verifizieren Sie den Dimensionssatz anhand dieses Beispiels. Falls nein, bestimmen Sie den Schnitt $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ und die Dimension von $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ aus dem Dimensionssatz.

Wir überprüfen, ob $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \{0\}$ gilt. Dazu sei $\mathbf{x} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$, also insbesondere $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ und $\mathbf{x} \in \mathcal{T}$. Dann existieren $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, sodass

$$\mathbf{y} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} d \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \\ -1 \end{pmatrix},$$

da die verwendeten Vektoren laut b) eine Basis des jeweiligen Unterraums bilden. Auflösen der vier Gleichungen liefert $a = e$, $b = \frac{1}{4}e$, $c = -e$ und $d = 0$. Setzt man z.B. $e = 1$, so erhält

man $a = 1$, $b = \frac{1}{4}$ und $c = -1$ und damit $B_{\mathcal{S} \cap \mathcal{T}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Skalieren wir die dritte

Komponente auf 1, so erhalten wir $B_{\mathcal{S} \cap \mathcal{T}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$.

Daraus ist sofort ersichtlich, dass $\dim(\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) = 1$ gilt. Wir folgern, dass $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ keine direkte Summe sein kann.

Wir erhalten aus dem Dimensionssatz (Satz 1.12)

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{S} + \mathcal{T}) &= \dim(\mathcal{S}) + \dim(\mathcal{T}) - \dim(\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) \\ &= 2 + 3 - 1 = 4. \end{aligned}$$

d.h. wir erhalten, dass $\dim(\mathcal{S} + \mathcal{T}) = 4$. Die drei Basisvektoren von \mathcal{T} sind bereits linear unabhängig. Wir können also die Basis von \mathcal{T} durch Hinzugabe des ersten Basisvektors von \mathcal{S} (jener, der nicht Basis des Schnittes ist) zu einer Basis von $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ erweitern.

- **Aufgabe 2.** (2 Punkte) Gegeben sei die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ -4 & -4 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & 7 & 10 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von φ und dessen Dimension!

Wir formen die Matrix A mittels elementarer Zeilenumformungen um, damit wir erkennen wie viele der Spalten in A linear unabhängig voneinander sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ -4 & -4 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & 7 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{z_2 - 2z_1 \\ z_3 + 4z_1 \\ z_4 + z_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \\ 0 & 2 & 8 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{z_4 - z_2 \\ z_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\ z_3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{z_4 - 8z_3 \\ z_1 - z_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man erkennt, dass beispielsweise die ersten drei Spalten linear unabhängig sind. Eine Basis des Bildes lautet daher

$$B_{\text{Bild}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Dimension des Bildes ist daher $\dim(\text{Bild}(\varphi)) = 3$.

b) Bestimmen Sie nun eine Basis des Kerns von φ und geben Sie auch dessen Dimension an.

Wir bestimmen den Kern aus $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Wir haben bereits in Unterpunkt a) die Matrix A umgeformt. Da die Inhomogenität des nun zu lösenden Gleichungssystems der Nullvektor ist, können wir das Ergebnis aus a) verwenden. Wir betrachten also

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Wir erhalten daraus

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2 \\ x_2 &= 2x_4 \\ x_3 &= -2x_4 \end{aligned}$$

bzw. eingesetzt

$$\begin{aligned} x_1 &= -2x_4 \\ x_2 &= 2x_4 \\ x_3 &= -2x_4 \end{aligned}$$

und bestimmen eine Basis des Kerns von φ zu $B_{\text{Kern}} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Folglich lautet die

Dimension des Kerns $\dim(\text{Kern}(\varphi)) = 1$.

- **Aufgabe 3.** (2 Punkte) Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem mit $z \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 2x_1 + (z+3)x_2 + (2z+2)x_3 &= 11+z \\ (z+3)x_2 + (-z-1)x_3 &= z+1 \\ (z+1)x_3 &= 2 \end{aligned}$$

- a) Bestimmen Sie die Koeffizientenmatrix A und die Inhomogenität \mathbf{b} des linearen Gleichungssystems.

In einem ersten Schritt lesen wir aus dem linearen Gleichungssystem die entsprechende Koeffizientenmatrix und Inhomogenität ab

$$A = \begin{pmatrix} 2 & z+3 & 2z+2 \\ 0 & z+3 & -z-1 \\ 0 & 0 & z+1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} z+11 \\ z+1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- b) Führt man den Gauß-Algorithmus durch, erhält man folgende reduzierte Matrixdarstellung der erweiterten Matrix

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & z+3 & 0 & z+3 \\ 0 & 0 & z+1 & 2 \end{array} \right).$$

Für welche Werte von z besitzt das Gleichungssystem keine Lösung, eine eindeutige Lösung und unendliche viele Lösungen? Begründen Sie Ihre Ergebnisse ausführlich mithilfe des Rangs der Koeffizientenmatrix A und der erweiterten Matrix $(A|\mathbf{b})$!

Der durchgeführte Gauß-Algorithmus, um die Matrix auf die reduzierte Form zu bringen, funktioniert wie folgt.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & z+3 & 2z+2 & z+11 \\ 0 & z+3 & -z-1 & z+1 \\ 0 & 0 & z+1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{z_1-2z_3 \\ z_2+z_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & z+3 & 0 & z+7 \\ 0 & z+3 & 0 & z+3 \\ 0 & 0 & z+1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{z_1-z_2} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & z+3 & 0 & z+3 \\ 0 & 0 & z+1 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Wir können folgende Fälle unterscheiden

- $z = -1$: $\text{Rang}(A) = 2, \text{Rang}(A|\mathbf{b}) = 3 \rightarrow \text{Rang}(A) \neq \text{Rang}(A|\mathbf{b})$
- $z = -3$: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|\mathbf{b}) = 2$
- $z \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -3\}$: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|\mathbf{b}) = 3$.

Für den Fall, dass $z = -1$ ist, hat das Gleichungssystem keine Lösung, da $\text{Rang}(A) \neq \text{Rang}(A|\mathbf{b})$. Für $z = -3$ ergibt sich eine eindimensionale Lösungsschar mit unendlich vielen Lösungen. Für alle anderen Fälle, also für $z \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -3\}$, gibt es eine eindeutige Lösung abhängig von z .

- c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem für alle Fälle aus Unterpunkt a) in Abhängigkeit von z . Bestimmen Sie dafür die allgemeine Lösung für die unterschiedlichen Fälle und geben Sie für den Fall unendlich vieler Lösungen auch explizit den Kern(A), dessen Bedeutung und Dimension an!

- Fall: $z = -3$

Für diesen Fall gibt es unendlich viele Lösungen, also bestimmen wir die allgemeine Lösung, indem wir den Kern der Koeffizientenmatrix A und eine beliebige Partikulärlösung der Gleichung $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ bestimmen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right).$$

Aus diesem Gleichungssystem folgt $x_1 = 2$ und $x_3 = -1$. Allgemein gilt, dass der Kern(A) die Lösung des homogenen Gleichungssystems, also von $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ist. Weiters gilt, dass die Dimension des Kerns gleich der Anzahl der Unbekannten minus des Rangs von A ist, also: $\dim\text{Kern}(A) = n - \text{Rang}(A)$

Wir wählen $x_2 = s$ und geben die allgemeine Lösung des Gleichungssystems an

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R},$$

mit $\text{Kern}(A) = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \dim\text{Kern}(A) = 1.$

- Fall: $z \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -3\}$

Für diesen Fall gibt es eine eindeutige Lösung und das bereits umgeformte Gleichungssystem sieht wie folgt aus

$$\begin{aligned} 2x_1 &= 4, \\ (z+3)x_2 &= z+3, \\ (z+1)x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Da wir den Fall $z \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -3\}$ behandeln, darf die zweite Zeile durch $z+3$ und die dritte Zeile durch $z+1$ dividiert werden, was die folgende eindeutige Lösung des Gleichungssystems ergibt

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{2}{z+1} \end{pmatrix} \quad z \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -3\}.$$