Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
WS 2020

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

1. Haupttest (FR, 23.11.2020) *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 6*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 1.** (2 Punkte)

a) Betrachten Sie die Mengen

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : 5x_1 - 3x_2 = 0, \quad -\sqrt{2}x_2 - 2x_4 = 0 \right\}$$
$$\mathcal{B} = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 - x_3 = 0, \quad x_3 = -1 \right\}.$$

Welche dieser Räume sind Unterräume von $\mathbb{R}^4$? Argumentieren Sie sorgfältig!

Man prüft leicht mittels Unterraumkriterum nach, dass $\mathcal{A}$ ein Unterraum ist.

Wir zeigen, dass das Unterraumkriterium für $\mathcal{B}$ verletzt ist. Dazu betrachtet man:

$$(u_3 + v_3) = -1 + (-1) = -2 \neq -1.$$

Das Unterraumkriterium ist also verletzt, somit ist $\mathcal{B}$ kein Unterraum!

b) Betrachten Sie nun die Mengen

$$\mathcal{S} = \left\{x \in \mathbb{R}^4 : x_4 = 0\right\}$$
$$\mathcal{T} = \left\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_3 = 0, \quad x_1 + x_2 = 0\right\}.$$

Finden Sie jeweils eine Basis von $\mathcal{S}$ und von $\mathcal{T}$ und geben Sie die Dimensionen der beiden Räume an. Sie müssen nicht nachprüfen, ob es sich bei diesen Mengen tatsächlich um Unterräume handelt!

Aus den definierenden Gleichungen für $\mathcal{T}$ erhält man $x_2 = -x_1$, $x_3 = \frac{x_1}{2}$. Damit folgt

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ \frac{x_1}{2} \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit lautet eine Basis $B_{\mathcal{T}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ und wir erhalten $\dim(\mathcal{T}) = 2$. Man liest unmittelbar ab: $B_{\mathcal{S}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ und $\dim(\mathcal{T}) = 3$.

c) Ist $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ eine direkte Summe?
Falls ja, begründen Sie warum und verifizieren Sie den Dimensionssatz anhand dieses Beispiels. Falls nein, bestimmen Sie den Schnitt $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ und die Dimension von $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ aus dem Dimensionssatz.

Wir überprüfen, ob $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \{0\}$ gilt. Dazu sei $\mathbf{x} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$, also insbesondere $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ und $\mathbf{x} \in \mathcal{T}$. Dann existieren $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, sodass

$$\mathbf{y} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

da die verwendeten Vektoren laut b) eine Basis des jeweiligen Unterraums bilden. Auflösen der vier Gleichungen liefert $a = e$, $b = -e$, $c = \frac{1}{2}e$ und $d = 0$. Setzt man z.B. $e = 1$, so erhält man $a = 1$, $b = -1$ und $c = \frac{1}{2}$ und damit $B_{\mathcal{S}\cap\mathcal{T}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Normieren wir die dritte Komponente auf 1, so erhalten wir $B_{\mathcal{S}\cap\mathcal{T}} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Daraus ist sofort ersichtlich, dass $\dim(\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) = 1$ gilt. Wir folgern, dass $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ keine direkte Summe sein kann.

Wir erhalten aus dem Dimensionssatz (Satz 1.12)

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{S} + \mathcal{T}) &= \dim(\mathcal{S}) + \dim(\mathcal{T}) - \dim(\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) \\ &= 3 + 2 - 1 = 4. \end{aligned}$$

d.h. wir erhalten, dass $\dim(\mathcal{S} + \mathcal{T}) = 4$. Die drei Basisvektoren von $\mathcal{T}$ sind bereits linear unabhänging. Wir können also die Basis von $\mathcal{T}$ durch Hinzugabe des ersten Basisvektors von $\mathcal{S}$ (jener, der nicht Basis des Schnittes ist) zu einer Basis von $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ erweitern.

• **Aufgabe 2.** (2 Punkte) Gegeben sei die Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & 5 \\ 3 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von φ und dessen Dimension!

Wir formen die Matrix A mittels elementarer Zeilenumformungen um, damit wir erkennen wie viele der Spalten in A linear unabhängig voneinander sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & 5 \\ 3 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{z_4 - 3z_1}]{\substack{z_2 - 2z_1 \\ z_3 - 2z_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{z_3 - 2z_2 \\ z_4 - 3z_2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{z_4 - z_3 \\ z_3 \cdot \frac{1}{5}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{z_2 + 2z_3 \\ z_1 - 3z_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man erkennt, dass beispielsweise die ersten drei Spalten linear unabhängig sind. Eine Basis des Bildes lautet daher

$$B_{\text{Bild}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Dimension des Bildes ist daher $\dim(\text{Bild}(\varphi)) = 3$.

b) Bestimmen Sie nun eine Basis des Kerns von φ und geben Sie auch dessen Dimension an.

Wir bestimmen den Kern aus $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Wir haben bereits in Unterpunkt a) die Matrix A umgeformt. Da die Inhomogenität des nun zu lösenden Gleichungssystems der Nullvektor ist, können wir das Ergebnis aus a) verwenden. Wir betrachten also

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir erhalten daraus

$$\begin{aligned} x_1 &= x_4 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= -x_4 \end{aligned}$$

und bestimmen eine Basis des Kerns von φ zu $B_{\text{Kern}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Folglich lautet die Dimension des Kerns $\dim(\text{Kern}(\varphi)) = 1$.

- **Aufgabe 3.** (2 Punkte) Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem mit $z \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (z-2)x_1 + 4x_2 + (2-2z)x_3 &= 2z+2 \\ 2x_2 + (2z-2)x_3 &= 0 \\ (2z-2)x_3 &= -2 \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Koeffizientenmatrix A und die Inhomogenität $\boldsymbol{b}$ des linearen Gleichungssystems.

In einem ersten Schritt lesen wir aus dem linearen Gleichungssystem die entsprechende Koeffizientenmatrix und Inhomogenität ab

$$A = \begin{pmatrix} z-2 & 4 & 2-2z \\ 0 & 2 & 2z-2 \\ 0 & 0 & 2z-2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2z+2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

b) Führt man den Gauß-Algorithmus durch, erhält man folgende reduzierte Matrixdarstellung der erweiterten Matrix

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} z-2 & 0 & 0 & 2z-4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2z-2 & -2 \end{array}\right).$$

Für welche Werte von z besitzt das Gleichungssystem keine Lösung, eine eindeutige Lösung und unendliche viele Lösungen? Begründen Sie Ihre Ergebnisse ausführlich mithilfe des Rangs der Koeffizientenmatrix A und der erweiterten Matrix $(A|\boldsymbol{b})$!

Der durchgeführte Gauß-Algorithmus, um die Matrix auf die reduzierte Form zu bringen, funktioniert wie folgt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} z-2 & 4 & 2-2z & 2z+2 \\ 0 & 2 & 2z-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2z-2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[z_2-z_3]{z_1+z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} z-2 & 4 & 0 & 2z \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2z-2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{z_1-2z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} z-2 & 0 & 0 & 2z-4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2z-2 & -2 \end{array}\right)$$

Wir können folgende Fälle unterscheiden

- $z = 1$: $\text{Rang}(A) = 2, \text{Rang}(A|\boldsymbol{b}) = 3 \to \text{Rang}(A) \neq \text{Rang}(A|b)$
- $z = 2$: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|\boldsymbol{b}) = 2$
- $z \in \mathbb{R}\backslash\{1, 2\}$: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|\boldsymbol{b}) = 3$.

Für den Fall, dass $z = 1$ ist, hat das Gleichungssystem keine Lösung, da $\text{Rang}(A) \neq \text{Rang}(A|b)$. Für $z = 2$ ergibt sich eine eindimensionale Lösungsschar mit unendlich vielen Lösungen. Für alle anderen Fälle, also für $z \in \mathbb{R}\backslash\{1, 2\}$, gibt es eine eindeutige Lösung abhängig von z.

c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem für alle Fälle aus Unterpunkt a) in Abhängigkeit von z. Bestimmen Sie dafür die allgemeine Lösung für die unterschiedlichen Fälle und geben Sie für den Fall unendlich vieler Lösungen auch explizit den Kern(A), dessen Bedeutung und Dimension an!

- Fall: $z = 2$
  Für diesen Fall gibt es unendlich viele Lösungen, also bestimmen wir die allgemeine Lösung, indem wir den Kern der Koeffizientenmatrix A und eine beliebige Partikulärlösung der Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ bestimmen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

  Aus diesem Gleichungssystem folgt $x_2 = 1$ und $x_3 = -1$. Allgemein gilt, dass der Kern(A) die Lösung des homogenen Gleichungssystems, also von A$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, ist. Weiters gilt, dass die Dimension des Kerns gleich der Anzahl der Unbekannten minus des Rangs von A ist, also: dimKern(A) = n - Rang(A)

  Wir wählen $x_1 = s$ und geben die allgemeine Lösung des Gleichungssystems an

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R},$$
$$\text{mit} \quad \text{Kern}(A) = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \text{dimKern}(A) = 1\,.$$

- Fall: $z \in \mathbb{R}\backslash\{1,2\}$
  Für diesen Fall gibt es eine eindeutige Lösung und das bereits umgeformte Gleichungssystem sieht wie folgt aus

$$\begin{aligned} (z-2)x_1 &= 2z-4\,, \\ 2x_2 &= 2\,, \\ (2z-2)x_3 &= -2\,. \end{aligned}$$

  Da wir den Fall $z \in \mathbb{R}\backslash\{1,2\}$ behandeln, darf die erste Zeile durch $z-2$ und die dritte Zeile durch $2z-2$ dividiert werden, was die folgende eindeutige Lösung des Gleichungssystems ergibt

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{1}{1-z} \end{pmatrix} \quad z \in \mathbb{R}\backslash\{1,2\}.$$