Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
WS 2020

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

1. Haupttest (FR, 23.11.2020) *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe 1.**
Die lineare Abbildung φ ist dargestellt durch die Matrix $A = [\varphi(B)]_B$ bezüglich der Basis B,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

$$A = [\varphi(B)]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) (1 Punkt) Berechnen Sie die Koordinaten des Bildes von $\boldsymbol{v}$, $[\varphi(\boldsymbol{v})]_B$, wobei

$$[\,\boldsymbol{v}\,]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt.

$$[\varphi(\boldsymbol{v})]_B = A[\,\boldsymbol{v}\,]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) (4 Punkte) Berechnen Sie die Darstellung von φ, $A' = [\varphi(E)]_E$, bezüglich der kanonischen Basis $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

Um A' aufzustellen benötigen wir zwei Transformationsmatrizen, $T_{E\leftarrow B}$ und $T_{B\leftarrow E} = T^{-1}_{E\leftarrow B}$. Die erste Matrix $T_{E\leftarrow B}$ ist leicht aufgestellt. Um die zweite Matrix $T_{B\leftarrow E}$ aufzustellen, muss man $T_{E\leftarrow B}$ invertieren, d.h., simultan 4 lineare Gleichungssysteme für ihre Spalten lösen,

$$T_{E\leftarrow B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} T_{B\leftarrow E} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{pmatrix} \Rightarrow T_{B\leftarrow E} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Damit folgt

$$A' = [\varphi(E)]_E = T_{E\leftarrow B} A T_{B\leftarrow E}, \quad \varphi(\boldsymbol{v}) = A'\boldsymbol{v} \Leftrightarrow [\varphi(\boldsymbol{v})]_E = A'[\boldsymbol{v}]_E,$$

und

$$A' = [\varphi(E)]_E] = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 15 & 5 & -10 & -10 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 9 \end{pmatrix}.$$

c) (4 Punkte) Berechnen Sie $\boldsymbol{v}$ und $\varphi(\boldsymbol{v})$.

$$\boldsymbol{v} = T_{E\leftarrow B}\,[\,\boldsymbol{v}\,]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder

$$\boldsymbol{v} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\varphi(\boldsymbol{v}) = A'\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 15 & 5 & -10 & -10 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

d) (1 Punkt) Überprüfen Sie das Ergebnis durch Transformation von $[\varphi(\boldsymbol{v})]_B$ in $\varphi(\boldsymbol{v})$ mit Hilfe der Transformationsmatrix $T_{E\leftarrow B}$.

$$\varphi(\boldsymbol{v}) = T_{E\leftarrow B}[\varphi(\boldsymbol{v})]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- **Aufgabe 2.** Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) (3 Punkte) Berechnen Sie das charakteristische Polynom, sowie die Eigenwerte der Matrix A.

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(6-\lambda)(5-\lambda) + 4(5-\lambda) = (5-\lambda)(16-8\lambda+\lambda^2) = (5-\lambda)(\lambda-4)^2$$

Um die Eigenwerte zu erhalten, berechnen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

$$p(\lambda) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 5, \quad \lambda_{2,3} = 4$$

b) (5 Punkte) Berechnen Sie weiters die dazugehörigen Eigenvektoren bzw. Hauptvektoren der Matrix A und geben Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an.

$\lambda_1 = 5, \quad n_1 = 1, \quad g_1 = 1:$
$\boldsymbol{v_1} : (A - \lambda_1 I)\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{0}$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v_1} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für $s = 1$ erhält man $\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 4, \quad n_2 = 2, \quad 1 \leq g_2 \leq 2:$
$\boldsymbol{v_2} : (A - \lambda_2 I)\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{0}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v_2} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für $r = 1$ erhält man $\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der Rang der Matrix $(A - \lambda_2 I) = 2$, damit ist die geometrische Vielfachheit $g_2 = 1$ und es existiert ein Hauptvektor.

$\boldsymbol{h_2} : (A - \lambda_2 I)\boldsymbol{h_2} = \boldsymbol{v_2}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{h_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) (2 Punkte) Stellen Sie die Jordan'sche Normalform und die dazugehörige Transformationsmatrix X, für die $AX = XJ$ gilt, auf.

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Aufgabe 3.**

a) (6 Punkte) Gegeben sei V = $\mathbb{R}^4$ versehen mit dem kanonischen inneren Produkt. Weiters sei U ein linearer Unterraum von V mit

$$U = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U mithilfe des Orthonormalisierungsverfahrens von Gram-Schmidt!

Wir wenden das Orthonormalisierungsverfahren an.

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \mathbf{u}_1 \quad \text{mit } U = \mathcal{L}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \\
\mathbf{w}_2 &= \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_1\rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1\rangle}\mathbf{w}_1 \\
\mathbf{w}_3 &= \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_2\rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2\rangle}\mathbf{w}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_1\rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1\rangle}\mathbf{w}_1
\end{aligned}$$

Um $\mathbf{w}_2$ zu bestimmen, müssen die folgenden inneren Produkte berechnet werden.

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_1\rangle &= 1 \\
\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1\rangle &= 1 + 1 = 2 \\
\mathbf{w}_2 &= \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Um $\mathbf{w}_3$ zu bestimmen, müssen die folgenden inneren Produkte berechnet werden.

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_1\rangle &= 1 + 1 = 2 \\
\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2\rangle &= \frac{1+1+4}{4} = \frac{6}{4} \\
\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_2\rangle &= \frac{1-1-2}{2} = 1
\end{aligned}$$

$$\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix} - \frac{2}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

Es wurde somit eine Orthogonalbasis gefunden, die nun noch normiert werden muss. Dies führt zu der folgenden Orthonormalbasis $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ mit

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-3\end{pmatrix}.$$

b) (3 Punkte) Betrachten Sie nun den Vektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix}2\\3\\\ldots\end{pmatrix} \in V.$$

Berechnen Sie die Orthogonalprojektion von $\mathbf{v}$ auf den Unterraum U.

Wir finden $\mathbf{u}$, indem wir die Orthogonalprojektion von $\mathbf{v}$ auf U berechnen. Dies gibt

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_1 \rangle \mathbf{b}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_2 \rangle \mathbf{b}_2 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_3 \rangle \mathbf{b}_3.$$

Wir berechnen die entsprechenden Skalarprodukte.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_1 \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_2 \rangle &= -\frac{3}{\sqrt{6}} \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_3 \rangle &= -\frac{12}{\sqrt{12}} \end{aligned}$$

Nun lässt sich $\mathbf{u}$ berechnen.

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{12}{12}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c) (1 Punkt) Gegeben sei nun der Vektor

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V.$$

Berechnen Sie $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_2$.

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_2 = \| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \|_2 = \| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$