

## LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

### 1. Haupttest (FR, 23.11.2020) *(mit Lösung)*

— Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min. —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i>
			<input type="text"/>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 18</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.



• **Aufgabe 1.**

Die lineare Abbildung  $\varphi$  ist dargestellt durch die Matrix  $A = [\varphi(B)]_B$  bezüglich der Basis  $B$ ,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$A = [\varphi(B)]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) (1 Punkt) Berechnen Sie die Koordinaten des Bildes von  $\mathbf{v}$ ,  $[\varphi(\mathbf{v})]_B$ , wobei

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gilt.

$$[\varphi(\mathbf{v})]_B = A[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) (4 Punkte) Berechnen Sie die Darstellung von  $\varphi$ ,  $A' = [\varphi(E)]_E$ , bezüglich der kanonischen Basis  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ .

Um  $A'$  aufzustellen benötigen wir zwei Transformationsmatrizen,  $T_{E \leftarrow B}$  und  $T_{B \leftarrow E} = T_{E \leftarrow B}^{-1}$ . Die erste Matrix  $T_{E \leftarrow B}$  ist leicht aufgestellt. Um die zweite Matrix  $T_{B \leftarrow E}$  aufzustellen, muss man  $T_{E \leftarrow B}$  invertieren, d.h., simultan 4 lineare Gleichungssysteme für ihre Spalten lösen,

$$T_{E \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4) T_{B \leftarrow E} = (e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4) \Rightarrow T_{B \leftarrow E} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -6 \\ -3 & 6 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Damit folgt

$$A' = [\varphi(E)]_E = T_{E \leftarrow B} A T_{B \leftarrow E}, \quad \varphi(\mathbf{v}) = A' \mathbf{v} \Leftrightarrow [\varphi(\mathbf{v})]_E = A' [\mathbf{v}]_E,$$

und

$$A' = [\varphi(E)]_E = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 12 \\ 3 & 6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

c) (4 Punkte) Berechnen Sie  $\mathbf{v}$  und  $\varphi(\mathbf{v})$ .

$$\mathbf{v} = T_{E \leftarrow B} [\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

oder

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\varphi(\mathbf{v}) = A' \mathbf{v} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 12 \\ 3 & 6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

d) (1 Punkt) Überprüfen Sie das Ergebnis durch Transformation von  $[\varphi(\mathbf{v})]_B$  in  $\varphi(\mathbf{v})$  mit Hilfe der Transformationsmatrix  $T_{E \leftarrow B}$ .

$$\varphi(\mathbf{v}) = T_{E \leftarrow B} [\varphi(\mathbf{v})]_B = 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- **Aufgabe 2.** Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & -4 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- a) (3 Punkte) Berechnen Sie das charakteristische Polynom, sowie die Eigenwerte der Matrix A.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (4 - \lambda)(9 - \lambda)(5 - \lambda) + 4(4 - \lambda) = (4 - \lambda)(49 - 14\lambda + \lambda^2) = (4 - \lambda)(\lambda - 7)^2$$

Um die Eigenwerte zu erhalten, berechnen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

$$\begin{aligned} p(\lambda) &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= 4, \quad \lambda_{2,3} = 7 \end{aligned}$$

- b) (5 Punkte) Berechnen Sie weiters die dazugehörigen Eigenvektoren bzw. Hauptvektoren der Matrix A und geben Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 4, \quad n_1 = 1, \quad g_1 = 1 : \\ \mathbf{v}_1 &: (A - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -4 \\ 8 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = s \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Für  $s = 1$  erhält man  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= 7, \quad n_2 = 2, \quad 1 \leq g_2 \leq 2 : \\ \mathbf{v}_2 &: (A - \lambda_2 I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \\ 8 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für  $r = 1$  erhält man  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Der Rang der Matrix  $(A - \lambda_2 I) = 2$ , damit ist die geometrische Vielfachheit  $g_2 = 1$  und es existiert ein Hauptvektor.

$$\mathbf{h}_2 : (A - \lambda_2 I)\mathbf{h}_2 = \mathbf{v}_2$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \\ 8 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- c) (2 Punkte) Stellen Sie die Jordan'sche Normalform und die dazugehörige Transformationsmatrix  $X$ , für die  $AX = XJ$  gilt, auf.

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• **Aufgabe 3.**

- a) (6 Punkte) Gegeben sei  $V = \mathbb{R}^4$  versehen mit dem kanonischen inneren Produkt. Weiters sei  $U$  ein linearer Unterraum von  $V$  mit

$$U = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von  $U$  mithilfe des Orthonormalisierungsverfahrens von Gram-Schmidt!

Wir wenden das Orthonormalisierungsverfahren an.

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 \quad \text{mit } U = \mathcal{L} \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \}$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} \mathbf{w}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1$$

Um  $\mathbf{w}_2$  zu bestimmen, müssen die folgenden inneren Produkte berechnet werden.

$$\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_1 \rangle = -1$$

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = 1 + 1 = 2$$

$$\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Um  $\mathbf{w}_3$  zu bestimmen, müssen die folgenden inneren Produkte berechnet werden.

$$\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_1 \rangle = 1 + 1 = 2$$

$$\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle = \frac{1 + 1 + 4}{4} = \frac{6}{4}$$

$$\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_2 \rangle = \frac{1 - 1 - 2}{2} = -1$$

$$\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es wurde somit eine Orthogonalbasis gefunden, die nun noch normiert werden muss. Dies führt zu der folgenden Orthonormalbasis  $B = \{ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \}$  mit

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- b) (3 Punkte) Betrachten Sie nun den Vektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in V.$$

Berechnen Sie die Orthogonalprojektion von  $\mathbf{v}$  auf den Unterraum  $U$ .

Wir finden  $\mathbf{u}$ , indem wir die Orthogonalprojektion von  $\mathbf{v}$  auf  $U$  berechnen. Dies gibt

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_1 \rangle \mathbf{b}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_2 \rangle \mathbf{b}_2 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_3 \rangle \mathbf{b}_3.$$

Wir berechnen die entsprechenden Skalarprodukte.

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_2 \rangle = \frac{11}{\sqrt{6}}$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_3 \rangle = \frac{8}{\sqrt{12}}$$

Nun lässt sich  $\mathbf{u}$  berechnen.

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{11}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{8}{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c) (1 Punkt) Gegeben sei nun der Vektor

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in V.$$

Berechnen Sie  $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_2$ .

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{4^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{42}$$