Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

1. Haupttest (MO, 22.11.2021) *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. ◦

- **Aufgabe 1.**
  Gegeben sei die Basis B des $\mathbb{R}^3$.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

a) (2,5 Punkte) Gegeben sei nun die Basis B' des $\mathbb{R}^3$.

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix} \right\}$$

Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $T_{B' \leftarrow B}$. Bestimmen Sie weiters die Koordinaten $[\mathbf{v}]_{B'}$ des Vektors $\mathbf{v}$ bezüglich der neuen Basis B'. Gegeben sind die Koordinaten von $\mathbf{v}$ bezüglich der Basis B mit $[\mathbf{v}]_B = (1, 2, 4)^T$.

Zunächst bestimmen wir die Transformationsmatrix T.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{z_1 \leftrightarrow z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[z_2+2z_1]{z_3+z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{z_3-2z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[z_1+2z_3]{z_2+4z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-1z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Damit ergibt sich die Transformationsmatrix T wie folgt.

$$T = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -6 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Im nächsten Schritt bestimmen wir $[\mathbf{v}]_{B'}$.

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -6 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}.$$

b) (3,5 Punkte) Gegeben sei nun die Basis C des $\mathbb{R}^2$.

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie zunächst die Matrix der Abbildung von $\varphi, [\varphi(B)]_C$. Benützen Sie diese Matrix, um $\varphi(\boldsymbol{u})$ mit $\boldsymbol{u} = (1, 0, 2)^T$ zu bestimmen.

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\boldsymbol{z}_2 + 2\boldsymbol{z}_1} \left(\begin{array}{cc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[\ ]{\substack{-1\boldsymbol{z}_1 \\ \frac{1}{4}\boldsymbol{z}_1}} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Damit ergibt sich für $[\varphi(B)]_C$

$$[\varphi(B)]_C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nun werden die Koordinaten von $\boldsymbol{u}$ bezüglich B berechnet.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_3 \\ \boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\boldsymbol{z}_3 \leftrightarrow \boldsymbol{z}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Nun erhalten wir $\varphi(\boldsymbol{u})$, indem wir zunächst $[\varphi(\boldsymbol{u})]_C = [\varphi(B)]_C \cdot [\boldsymbol{u}]_B$ und danach $\varphi(\boldsymbol{u}) = C \cdot [\varphi(\boldsymbol{u})]_C$ berechnen.

$$[\varphi(\boldsymbol{u})]_C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- **Aufgabe 2.**

a) (2 Punkte) Betrachten Sie die Mengen

$$\mathbb{G} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 + 3x_3 = 0, \quad x_1 = 0\right\}$$
$$\mathbb{H} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 - x_3 = 2\right\}$$

und untersuchen Sie, ob diese Unterräume von $\mathbb{R}^3$ sind. Argumentieren Sie sorgfältig mit dem Unterraumkriterium (Nachprüfen oder Gegenbeispiel)!

Die im folgenden angeführten Nummern über den Gleichheitszeichen beziehen sich auf die Rechenregeln aus Satz 1.1 im Vorlesungsskriptum. Wir verwenden jeweils das Unterraumkriterium und beginnen mit $\mathbb{G}$:

(i) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{G} : \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{G}$

Für beliebige $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{G}$ gilt laut Bestimmungsgleichungen: $u_2 + 3u_3 = 0$, $u_1 = 0$, sowie $v_2 + 3v_3 = 0$, $v_1 = 0$. Es muss nun gezeigt werden, dass $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}$ die Bestimmungsgleichungen ebenfalls erfüllt. Dazu betrachtet man:

$$\begin{aligned}(u_2 + v_2) + 3(u_3 + v_3) &\overset{(4,7)}{=} (u_2 + v_2) + (3u_3 + 3v_3) \overset{(2)}{=} (u_2 + v_2 + 3u_3) + (3v_3) \\ &\overset{(1)}{=} (u_2 + 3u_3 + v_3) + (3v_3) \overset{(2)}{=} (u_2 + 3u_3) + (v_2 + 3v_3) = 0 + 0 = 0 \quad \checkmark\end{aligned}$$

und für die zweite Gleichung

$$(u_1 + v_1) = 0 + 0 = 0. \quad \checkmark$$

(ii) $\forall \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{G}\ \forall s \in \mathbb{R} : s\mathbf{u} \in \mathbb{G}$

Für beliebige $\mathbf{u} \in \mathbb{G}$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt laut Bestimmungsgleichungen wieder: $u_2 + 3u_3 = 0$, $u_1 = 0$. Es soll nun gezeigt werden, dass $s\mathbf{u} = \begin{pmatrix} su_1 \\ su_2 \\ su_3 \end{pmatrix}$ die Bestimmungsgleichungen ebenfalls erfüllt. Dazu betrachtet man:

$$(s\ u_2) + (s\ 3u_3) \overset{(4)}{=} (s\ u_2) + (3s\ u_3) \overset{(7)}{=} s(u_2 + 3u_3) = s\ 0 = 0 \quad \checkmark$$

und für die zweite Gleichung

$$su_1 = s \cdot 0 = 0. \quad \checkmark$$

Somit erfüllt $\mathbb{G}$ das Unterraumkriterium, ist also ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

Nun überprüfen wir $\mathbb{H}$:

Der zweite Teil des Unterraumkriteriums liefert hier für $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$ und $k \in \mathbb{R}$, dass $k \cdot \mathbf{u} = \begin{pmatrix} k\ u_1 \\ k\ u_2 \\ k\ u_3 \end{pmatrix} \notin \mathbb{H}$:

$$k\ u_1 - k\ u_3 \overset{(7)}{=} k(u_1 - u_3) = k \cdot 2 \neq 2$$

für $k \neq 1$. Dies muss jedoch für alle $k \in \mathbb{R}$ gelten, weshalb das Unterraumkriterium nicht erfüllt ist. $\mathbb{H}$ ist also kein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

b) (2 Punkte) Gegeben seien nun die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbb{U} = \left\{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_3 + x_4 = 0, \quad x_3 + x_1 = 0\right\}$$
$$\mathbb{V} = \left\{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_4 - 4x_1 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0\right\}.$$

Finden Sie jeweils eine Basis von $\mathbb{U}$ und $\mathbb{V}$.
Hinweis: Sie müssen nicht nachprüfen, dass $\mathbb{U}$ und $\mathbb{V}$ tatsächlich Unterräume von $\mathbb{R}^4$ sind.

Aus den definierenden Gleichungen für $\mathbb{U}$ erhält man $x_4 = -2x_3$, $x_1 = -x_3$ und x_2 beliebig. Damit folgt

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -2x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis lautet somit $B_{\mathbb{U}} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Aus den Bestimmungsgleichungen für $\mathbb{V}$ erhält man die Beziehungen $x_4 = 2x_1$ und $x_2 = x_3$. Damit folgt

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit lautet eine Basis $B_{\mathbb{V}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

c) (2 Punkte) Ermitteln Sie den Schnitt von $\mathbb{U}$ und $\mathbb{V}$ und geben Sie die Dimension an. Falls der Schnitt nicht leer ist, ermitteln Sie eine Basis von $\mathbb{U} \cap \mathbb{V}$.
Ist $\mathbb{R}^4$ eine direkte Summe aus $\mathbb{U}$ und $\mathbb{V}$, d.h. $\mathbb{R}^4 = \mathbb{U} \bigoplus \mathbb{V}$? Falls ja, geben Sie eine Basis von $\mathbb{U} \bigoplus \mathbb{V}$ an, falls nein finden Sie eine Basis von $\mathbb{U} + \mathbb{V}$ und geben Sie die Dimension an!

Wir überprüfen, ob $\mathbb{U} \cap \mathbb{V} = \emptyset$ gilt. Dazu sei $\mathbf{x} \in \mathbb{U} \cap \mathbb{V}$, also insbesondere $\mathbf{x} \in \mathbb{U}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$. Demnach existieren Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, sodass

$$\mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da die verwendeten Vektoren laut Unterpunkt b) eine Basis des jeweiligen Unterraums bilden. Auflösen der vier Gleichungen liefert $\beta = \alpha$, $\gamma = -\alpha$ und $\delta = \alpha$. Setzt man z.B. $\alpha = 1$, so sieht man, dass der Vektor $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^\top$ durch die anderen Basisvektoren dargestellt werden kann. Demnach ist der Schnitt nicht leer und $\mathbb{U}$ und $\mathbb{V}$ bilden keine direkte Summe. Eine Basis des Schnitts ist demnach $B_{\mathbb{U} \cap \mathbb{V}} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.
Es gilt daher $\dim(\mathbb{U} \cap \mathbb{V}) = 1$ und mit dem Dimensionssatz (Satz 1.12) folgt $\dim(\mathbb{U} + \mathbb{V}) = 3$.
Man sieht, dass der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ von den Basisvektoren von $\mathbb{V}$ linear unabhängig ist. Daher lautet eine Basis der Summe der beiden Unterräume $B_{\mathbb{U}+\mathbb{V}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

• **Aufgabe 3.** Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

a) (2,5 Punkte) Berechnen Sie den Rang der Matrix A und der erweiterten Matrix $(A|\boldsymbol{b})$. Was folgt daraus für die Lösbarkeit des Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$?

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{z_1 \leftrightarrow z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[z_3 - 2z_1]{z_4 - z_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & -3 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{z_3 - 4z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -15 & -15 & -30 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[z_4 - z_3/5]{-z_3/15}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir erkennen der $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|\boldsymbol{b}) = 3 < 4$. Es existieren also unendlich viele Lösungen von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

b) (1,5 Punkte) Geben Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ an.

Wir formen noch etwas weiter um.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{z_2-3z_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{z_1+z_2-z_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir können nun direkt

$$x_1 - 2x_4 = 1,\ x_2 = x_4,\ x_3 + x_4 = 2$$

ablesen und zu

$$x_1 = 1 - 2x_4,\ x_2 = x_4,\ x_3 = 2 - x_4$$

auflösen. Mit der willkürlichen Wahl $x_4 = t \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\boldsymbol{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{:= \boldsymbol{x}^*} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{:= \boldsymbol{v_1}}$$

Machen wir die Probe

$$A\boldsymbol{x}^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$A\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3+2 \\ -2-1-1+4 \\ -4+2+1+1 \\ -2-1+2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

erkennen wir $\boldsymbol{x}^*$ ist eine Partikulärlösung $\boldsymbol{x_p}$ und $t\boldsymbol{v_1}$ die Menge aller Lösungen $\boldsymbol{x_h}$ des homogenen Gleichungungssystems.

c) (1 Punkt) Betrachten Sie die Matrix als eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.
Berechnen Sie Kern(A) und geben Sie eine Basis und die Dimension von Kern(A) an.

$\text{Kern}A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 : \; A\boldsymbol{x} = 0\}$ Nun das ist genau die Menge der Lösungen des homogenen Gleichungssystems und die haben wir in b) schon berechnet.

$$\text{Kern}A = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 : \; \boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R}\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$(-2, -1, -1, 1)^T$ ist damit Basis des Kerns von A und Dim Kern$(A) = 1$.

d) (1 Punkt) Bestimmen Sie das Bild von A, $\mathcal{B}(A)$ und geben Sie eine Basis, wie auch die Dimension von $\mathcal{B}(A)$ an.

$$\mathcal{B}(A) = \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4 : \; \exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \text{ mit } \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}\right\}$$

$$= \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4 : \; \boldsymbol{y} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \; \alpha_i \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$$

Damit sind die drei Vektoren eine Basis für $\mathcal{B}(A)$ und die Dimension des Bildes Dim $\mathcal{B}(A) = 3 = \text{Rang}(A)$. Mit $n = 4 = \text{Dim Kern}(A) + \text{Rang }(A) = 1 + 3$ ist auch der Dimensionssatz erfüllt.