Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
WS 2021/22

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH

2. Haupttest (Di, 25.01.2022) *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe 1.**

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum V der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[-3,3]$,

$$V = C[-3,3] = \{f : [-3,3] \to \mathbb{R}\}$$

und einen Unterraum U der Polynome von Grad ≤ 2 von V. Das Skalarprodukt und die Norm sind definiert als

$$\langle f, g \rangle := \int_{-3}^{3} f(x)g(x)\mathrm{d}x, \;\; ||f|| := \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Ein Unterraum U von V ist gegeben durch die Basis

$$B = \{b_1, b_2, b_3\} = \left\{1, x, x^2\right\}.$$

a) (3 Punkte) Geben Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt Verfahren eine orthonormale Basis von U an.

$$w_1 = 1$$

$$\langle w_1, w_1 \rangle = \int_{-3}^{3} 1\mathrm{d}x = x|_{-3}^{3} = 6 \;\Rightarrow\; ||w_1|| = \sqrt{6}$$

$$w_2 = -\frac{\langle b_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 + b_2$$

$$\langle b_2, w_1 \rangle = \int_{-3}^{3} x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}|_{-3}^{3} = 0 \;\Rightarrow\; w_2 = x$$

$$w_3 = -\frac{\langle b_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle b_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 + b_3$$

$$\langle b_3, w_1 \rangle = \int_{-3}^{3} x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}|_{-3}^{3} = \frac{54}{3} = 18$$

$$\langle b_3, w_2 \rangle = \int_{-3}^{3} x^3\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}|_{-3}^{3} = 0 \;\Rightarrow\; w_3 = -\frac{18}{6} + x^2 = x^2 - 3$$

$$\langle w_2, w_2 \rangle = \int_{-3}^{3} x^2\mathrm{d}x = 18 \;\Rightarrow\; ||w_2|| = 3\sqrt{2}$$

$$\langle w_3, w_3 \rangle = \int_{-3}^{3} (x^2-3)^2\mathrm{d}x = \int_{-3}^{3} (x^4-6x^2+9)\mathrm{d}x = \frac{x^5}{5}|_{-3}^{3} - 6\frac{x^3}{3}|_{-3}^{3} + 9x|_{-3}^{3} = \frac{216}{5} \;\Rightarrow\; ||w_3|| = \frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$$

Damit ist die ONB von U wie folgt gegeben:

$$B_{ONB} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}x, \frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{6}}(x^2 - 3) \right\}.$$

b) (2 Punkte) Finden Sie die Bestapproximation $u \in U$ von $v = 3x^2 + 6x + 1 \in V$.

Ein Polynom zweiten Grades ist per Definition Element des Unterraums und damit als Linearkombination der Basisvektoren darstellbar. Die Bestappoximation ist also das Polynom selbst.

$$u = ab_1 + bb_2 + cb3 = v$$

c) (1 Punkt) Berechnen Sie den Abstand $||u - v||$ der Bestapproximation u zu v.

$$u = v \implies ||u - v|| = 0$$

- **Aufgabe 2.**

  Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) (1,5 Punkte) Beweisen Sie, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ und $\lambda_3 = \frac{5}{2}$ die Eigenwerte von A sind.

Wir bestimmen das charakteristische Polynom der Matrix. Für Eigenvektoren gilt

$$A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2}-\lambda & 3 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = 0.$$

Dieses Gleichungssysem hat nur Lösungen ungleich Null, wenn der Rang der Matrix nicht voll ist.

$$\det A = (2-\lambda)(\frac{1}{2}-\lambda)(1-\lambda) - \frac{3}{4}(\frac{1}{2}-\lambda) = (\frac{1}{2}-\lambda)\left[\lambda^2 - 3\lambda + \frac{5}{4}\right] = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = \frac{1}{2},\ \lambda_3 = \frac{5}{2}$$

Wir erhalten also den Eigenwert 1/2 mit algebraischer Vielfachheit 2 und den Eigenwert 5/2 mit algebraischer Vielfachheit 1.

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte der Matrix A.

Wir benutzen wieder

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}.$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}: \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 3 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{matrix} 3a = -c \\ 2a = -3c \\ 3a = -c \end{matrix}\right\} a = c = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{v_1} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{5}{2}: \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -2 & 3 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{matrix} a = c \\ 2a + 3c = 2b \end{matrix}\right\} 2b = 5a \;\Rightarrow\; \boldsymbol{v_2} = u\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die geometrische Vielfachheit von λ_1 ist also 1 und ebenso für λ_2.

c) (2,5 Punkte) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A und geben Sie die Transformationsmatrix an. Besitzt A eine Eigenbasis?

Da λ_1 algebraische Vielfachheit 2, aber nur geometrische Vielfachheit 1 besitzt, gibt es keine Eigenbasis. Wir benötigen daher einen Hauptvektor um ein vollständiges System an l.u. Vektoren zu erhalten und auf Jordansche Normalform transformieren zu können. Ein Hauptvektor erfüllt

$$A\boldsymbol{h} = \lambda\boldsymbol{h} + \boldsymbol{v}.$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 3 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 3a &= -c \\ 2a + 3c &= t \end{aligned}\right\} a = -\frac{t}{7} \Rightarrow \boldsymbol{h_1} = t\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ 0 \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Jordansche Normalform lässt sich nun unmittelbar über die Jordan-Blöcke anschreiben.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Wir wählen $u = 1$, $t = 7$ und $s = 0$ für eine möglichst einfache Darstellung und erhalten

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 7 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

für die Transformationsmatrix.

- **Aufgabe 3.**
  Sei $V = \mathbb{R}^3$ und B und B' Basen von V, mit

$$B = \{b_1, b_2, b_3\} = \left\{(6,3,3)^T, (3,2,2)^T, (3,1,2)^T\right\}$$
$$B' = \{b'_1, b'_2, b'_3\} = \left\{(1,1,0)^T, (0,0,1)^T, (0,1,1)^T\right\}$$

a) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $T_{B' \leftarrow B}$. Dies ist gleichbedeutend mit der Suche nach der Lösung des Gleichungssystems

$$b_1 = (6,3,3)^T = t_{11}b'_1 + t_{21}b'_2 + t_{31}b'_3$$
$$b_2 = (3,2,2)^T = t_{12}b'_1 + t_{22}b'_2 + t_{32}b'_3$$
$$b_3 = (3,1,2)^T = t_{13}b'_1 + t_{23}b'_2 + t_{33}b'_3.$$

Wir bringen das Gleichungssystem in Matrixform.

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{32} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$$

Nun vereinfachen wir indem wir folgende Rechnung anstellen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{z_2 - z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{z_2 \leftrightarrow z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{z_2 - z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Somit ergibt sich für die Transformationsmatrix

$$T_{B' \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 4 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

b) (1 Punkt) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A, mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 2 - 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} \neq 0 \Rightarrow \text{Matrix A ist invertierbar.}$$

c) (2 Punkt) Invertieren Sie die Matrix A aus Punkt b)

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} \frac{2}{3} & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3\cdot z_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} -2 & -3 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{z_1 \leftrightarrow z_3}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{z_3+2\cdot z_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[z_3+z_2]{(-1)\cdot z_1}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{z_2+2\cdot z_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)\cdot z_3]{z_1+z_2}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Somit ist die Inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 4 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$