Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
WS 2021/22

L I N E A R E   A L G E B R A   F Ü R   T P H

2. Haupttest (Di, 25.01.2022)

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. ∘

- **Aufgabe 1.**

  Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) (1,5 Punkte) Beweisen Sie, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 4$ die Eigenwerte von A sind.

Wir bestimmen das charakteristische Polynom der Matrix. Für Eigenvektoren gilt

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\boldsymbol{v} = 0.$$

Dieses Gleichungssysem hat nur Lösungen ungleich Null, wenn der Rang der Matrix nicht voll ist.

$$\det A = (2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) - 2(1-\lambda) = (1-\lambda)\left[\lambda^2 - 5\lambda + 4\right] = 0$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 4$$

Wir erhalten also den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 2 und den Eigenwert 4 mit algebraischer Vielfachheit 1.

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte der Matrix A.

Wir benutzen wieder

$$A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}.$$

$$\lambda_1 = 1: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{array}{c} a = -b \\ b = 0 \end{array}\right\} \boldsymbol{v_1} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 4: \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{array}{c} 2a = b \\ 3c = b \end{array}\right\} \boldsymbol{v_2} = u \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Die geometrische Vielfachheit von λ_1 ist also 1 und ebenso für λ_2.

c) (2,5 Punkte) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A und geben Sie die Transformationsmatrix an. Besitzt A eine Eigenbasis?

Da λ_1 algebraische Vielfachheit 2, aber nur geometrische Vielfachheit 1 besitzt, gibt es keine Eigenbasis. Wir benötigen daher einen Hauptvektor um ein vollständiges System an l.u. Vektoren zu erhalten und auf Jordansche Normalform transformieren zu können. Ein Hauptvektor erfüllt

$$A\boldsymbol{h} = \lambda\boldsymbol{h} + \boldsymbol{v}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} a = -b \\ b = t \end{matrix}\right\} \boldsymbol{h_1} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Jordansche Normalform lässt sich nun unmittelbar über die Jordan-Blöcke anschreiben.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Wir wählen $u = 1$, $t = 1$ und $s = 0$ für eine möglichst einfache Darstellung und erhalten

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

für die Transformationsmatrix.

- **Aufgabe 2.**
  Sei $V = \mathbb{R}^3$ und B und B' Basen von V, mit

$$B = \{b_1, b_2, b_3\} = \left\{(4,2,3)^T, (4,4,3)^T, (4,2,6)^T\right\}$$
$$B' = \{b'_1, b'_2, b'_3\} = \left\{(1,1,0)^T, (0,0,1)^T, (0,1,1)^T\right\}$$

a) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $T_{B' \leftarrow B}$. Dies ist gleichbedeutend mit der Suche nach der Lösung des Gleichungssystems

$$b_1 = (4,2,3)^T = t_{11}b'_1 + t_{21}b'_2 + t_{31}b'_3$$
$$b_2 = (4,4,3)^T = t_{12}b'_1 + t_{22}b'_2 + t_{32}b'_3$$
$$b_3 = (4,2,6)^T = t_{13}b'_1 + t_{23}b'_2 + t_{33}b'_3.$$

Wir bringen das Gleichungssystem in Matrixform

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{32} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}.$$

Nun vereinfachen wir indem wir folgende Rechnung anstellen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{z_2 - z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{z_2 \leftrightarrow z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{z_2 - z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Somit ergibt sich für die Transformationsmatrix

$$T_{B' \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

b) (1 Punkt) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A, mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\det(A) = 1 - 5 - 1 + 1 = -4 \neq 0 \Rightarrow$ Matrix A ist invertierbar.

c) (2 Punkt) Invertieren Sie die Matrix A aus Punkt b).

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[z_3+z_1]{z_2-z_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{z_3/(-4)}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right) \xrightarrow[z_2-6\cdot z_3]{z_1+5\cdot z_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & -1/4 & 0 & -5/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right) \xrightarrow{z_1+z_2}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right)$$

Somit ist die Inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \\ -1/4 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}$$

- **Aufgabe 3.**

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum V der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[-2,2]$,

$$V = C[-2,2] = \{f : [-2,2] \to \mathbb{R}\}$$

und einen Unterraum U der Polynome von Grad ≤ 2 von V. Das Skalarprodukt und die Norm sind definiert als

$$\langle f, g\rangle := \int_{-2}^{2} f(x)g(x)\mathrm{d}x, \quad ||f|| := \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

Ein Unterraum U von V ist gegeben durch die Basis

$$B = \{b_1, b_2, b_3\} = \left\{1, x, x^2\right\}.$$

a) (3 Punkte) Geben Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt Verfahren eine orthonormale Basis von U an.

$$w_1 = 1$$

$$\langle w_1, w_1\rangle = \int_{-2}^{2} 1\mathrm{d}x = x|_{-2}^{2} = 4 \Rightarrow ||w_1|| = \sqrt{4} = 2$$

$$w_2 = -\frac{\langle b_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 + b_2$$

$$\langle b_2, w_1\rangle = \int_{-2}^{2} x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}|_{-2}^{2} = 0 \Rightarrow w_2 = x$$

$$w_3 = -\frac{\langle b_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle b_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 + b_3$$

$$\langle b_3, w_1\rangle = \int_{-2}^{2} x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}|_{-2}^{2} = \frac{16}{3}$$

$$\langle b_3, w_2\rangle = \int_{-2}^{2} x^3\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}|_{-2}^{2} = 0 \Rightarrow w_3 = -\frac{4}{3} + x^2 = x^2 - \frac{4}{3}$$

$$\langle w_2, w_2\rangle = \int_{-2}^{2} x^2\mathrm{d}x = \frac{16}{3} \Rightarrow ||w_2|| = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\langle w_3, w_3\rangle = \int_{-2}^{2} (x^2 - \frac{4}{3})^2\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} (x^4 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{16}{9})\mathrm{d}x = \frac{x^5}{5}|_{-2}^{2} - \frac{8}{3}\frac{x^3}{3}|_{-2}^{2} + \frac{16}{9}x|_{-2}^{2} = \frac{256}{45}$$

$$\Rightarrow ||w_3|| = \frac{16}{3\sqrt{5}}$$

Damit ist die ONB von U wie folgt gegeben:

$$B_{ONB} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}x, \frac{3\sqrt{5}}{16}\left(x^2 - \frac{3}{4}\right)\right\}.$$

b) (2 Punkte) Finden Sie die Bestapproximation $u \in U$ von $v = 3x^2 + 6x + 1 \in V$.

Ein Polynom zweiten Grades ist per Definition Element des Unterraums und damit als Linearkombination der Basisvektoren darstellbar. Die Bestappoximation ist also das Polynom selbst.

$$u = v = 3x^2 + 6x + 1$$

c) (1 Punkt) Berechnen Sie den Abstand $||u - v||$ der Bestapproximation u zu v.

$$u = v \implies ||u - v|| = 0$$