Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH

2. Haupttest (Di, 25.01.2022) (*mit Lösung*)

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden $\boxed{\textit{Kästchen}}$ **eingetragenen Antworten.**

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

•

- **Aufgabe 1.**
  Sei $V = \mathbb{R}^3$ und B und B' Basen von V, mit

$$B = \{b_1, b_2, b_3\} = \left\{(2,1,2)^T, (2,5,6)^T, (2,4,6)^T\right\}$$
$$B' = \{b'_1, b'_2, b'_3\} = \left\{(1,1,0)^T, (0,0,1)^T, (0,1,1)^T\right\}$$

a) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $T_{B' \leftarrow B}$. Dies ist gleichbedeutend mit der Suche nach der Lösung des Gleichungssystems

$$b_1 = (2,1,2)^T = t_{11}b'_1 + t_{21}b'_2 + t_{31}b'_3$$
$$b_2 = (2,5,6)^T = t_{12}b'_1 + t_{22}b'_2 + t_{32}b'_3$$
$$b_3 = (2,4,6)^T = t_{13}b'_1 + t_{23}b'_2 + t_{33}b'_3.$$

Wir bringen das Gleichungssystem in Matrixform

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{32} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}.$$

Nun vereinfachen wir indem wir folgende Rechnung anstellen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 6 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{z_2 - z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 6 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{z_2 \leftrightarrow z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{z_2 - z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Somit ergibt sich für die Transformationsmatrix

$$T_{B' \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

b) (1 Punkt) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A, mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\det(A) = 9 - 3 + 9 - 9 = 6 \neq 0 \Rightarrow$ Matrix A ist invertierbar.

c) (2 Punkt) Invertieren Sie die Matrix A aus Punkt b).

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{z_1 \leftrightarrow z_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{z_2 - 3\cdot z_1 \\ z_3 + 3\cdot z_1}}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{z_3 + z_2 \\ (-1)\cdot z_3}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{z_1 - z_3 \\ z_2 + 4\cdot z_3}}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & -3 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{z_3/2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3/2 & -3/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{z_1 + z_2 \\ z_2/3}}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Somit ist die Inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -1 \\ -1/2 & -1/2 & -2/3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

• **Aufgabe 2.**
Wir betrachten den euklidischen Vektorraum V der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[-1, 1]$,

$$V = C[-1, 1] = \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R}\}$$

und einen Unterraum U der Polynome von Grad ≤ 2 von V. Das Skalarprodukt und die Norm sind definiert als

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x, \ \ ||f|| := \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

Ein Unterraum U von V ist gegeben durch die Basis

$$B = \{b_1, b_2, b_3\} = \left\{1, x, x^2\right\}.$$

a) (3 Punkte) Geben Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt Verfahren eine orthonormale Basis von U an.

$$w_1 = 1$$

$$\langle w_1, w_1\rangle = \int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}x = x|_{-1}^{1} = 2 \ \Rightarrow \ ||w_1|| = \sqrt{2}$$

$$w_2 = -\frac{\langle b_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 + b_2$$

$$\langle b_2, w_1\rangle = \int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}|_{-1}^{1} = 0 \ \Rightarrow \ w_2 = x$$

$$w_3 = -\frac{\langle b_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle b_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 + b_3$$

$$\langle b_3, w_1\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\langle b_3, w_2\rangle = \int_{-1}^{1} x^3\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}|_{-1}^{1} = 0 \ \Rightarrow \ w_3 = -\frac{1}{3} + x^2 = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\langle w_2, w_2\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3} \ \Rightarrow \ ||w_2|| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\langle w_3, w_3\rangle = \int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})^2\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9})\mathrm{d}x = \frac{x^5}{5}|_{-1}^{1} - \frac{2}{3}\frac{x^3}{3}|_{-1}^{1} + \frac{1}{9}x|_{-1}^{1} = \frac{8}{45}$$

$$\Rightarrow \ ||w_3|| = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$$

Damit ist die ONB von U wie folgt gegeben:

$$B_{ONB} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(x^2 - \frac{1}{3})\right\}.$$

b) (2 Punkte) Finden Sie die Bestapproximation $u \in U$ von $v = 3x^2 + 6x + 1 \in V$.

Ein Polynom zweiten Grades ist per Definition Element des Unterraums und damit als Linearkombination der Basisvektoren darstellbar. Die Bestappoximation ist also das Polynom selbst.

$$u = v = 3x^2 + 6x + 1$$

c) (1 Punkt) Berechnen Sie den Abstand $||u - v||$ der Bestapproximation u zu v.

$$u = v \implies ||u - v|| = 0$$

- **Aufgabe 3.**
  Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

a) (1,5 Punkte) Beweisen Sie, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = \frac{3}{2}$ die Eigenwerte von A sind.

Wir bestimmen das charakteristische Polynom der Matrix. Für Eigenvektoren gilt

$$A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v} \;\Rightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3-\lambda \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = 0.$$

Dieses Gleichungssysem hat nur Lösungen ungleich Null, wenn der Rang der Matrix nicht voll ist.

$$\det A = (2-\lambda)(\frac{1}{2}-\lambda)(3-\lambda) - \frac{3}{2}(2-\lambda) = (2-\lambda)\left[\lambda^2 - \frac{7}{2}\lambda + \frac{6}{2}\right] = 0$$

$$\lambda_1 = 2,\; \lambda_2 = 2,\; \lambda_3 = \frac{3}{2}$$

Wir erhalten also den Eigenwert 2 mit algebraischer Vielfachheit 2 und den Eigenwert $\frac{3}{2}$ mit algebraischer Vielfachheit 1.

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte der Matrix A.

Wir benutzen wieder

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}.$$

$$\lambda_1 = 2: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{matrix} b = -c \\ b = -2c \end{matrix}\right\} b = c = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v_1} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{3}{2}: \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{a}{2} + b = -c \\ b = -3c \end{matrix}\right\} a = 4c \Rightarrow \boldsymbol{v_2} = u \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die geometrische Vielfachheit von λ_1 ist also 1 und ebenso für λ_2.

c) (2,5 Punkte) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A und geben Sie die Transformationsmatrix an. Besitzt A eine Eigenbasis?

Da λ_1 algebraische Vielfachheit 2, aber nur geometrische Vielfachheit 1 besitzt, gibt es keine Eigenbasis. Wir benötigen daher einen Hauptvektor um ein vollständiges System an l.u. Vektoren zu erhalten und auf Jordansche Normalform transformieren zu können. Ein Hauptvektor erfüllt

$$A\boldsymbol{h} = \lambda \boldsymbol{h} + \boldsymbol{v}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} b + c = t \\ b = -2c \end{matrix}\right\} b = 2t, c = -t \;\Rightarrow\; \boldsymbol{h_1} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Jordansche Normalform lässt sich nun unmittelbar über die Jordan-Blöcke anschreiben.

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Wir wählen $t = 1$ und $s = 0$ für eine möglichst einfache Darstellung und erhalten

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

für die Transformationsmatrix.