Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
WS 2021

# LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

**Nachtest (FR, 04.02.2022)** *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| ↑ *FAMILIENNAME* | ↑ *Vorname* | ↑ *Studium / Matr.Nr.* |

| *1.* | *2.* | *3.* | *gesamt* |
|---|---|---|---|
| | | | |
| *Punkte* | | | *maximal 18* |

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

**Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden** $\boxed{\textbf{\textit{Kästchen}}}$ **eingetragenen Antworten.**

**Machen Sie sich zunächst Notizen**,
**und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!**

**Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.** •

- **Aufgabe 1.**
  Das folgende lineare Gleichungssystem mit $y \in \mathbb{R}$ ist gegeben.

$$\begin{aligned} x_1 \quad & & &= 3 \\ -3x_1 + & \ (y-3)x_2 & &= -4 \\ -2x_1 + & \ (2y-6)x_2 + (y+1)x_3 & &= y+5 \end{aligned}$$

a) (0.5 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizientenmatrix $A$ und die Inhomogenität $\boldsymbol{b}$ des linearen Gleichungssystems.

Die Koeffizientenmatrix und die Inhomogenität des linearen Gleichungssystems lauten wie folgt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & y-3 & 0 \\ -2 & 2y-6 & y+1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ y+5 \end{pmatrix}$$

b) (3 Punkte) Unter Verwendung des Gauß-Algorithmus erhält man folgende reduzierte Matrixdarstellung der erweiterten Matrix

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & y-3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & y+1 & y+1 \end{array}\right).$$

Für welche Werte von $y$ besitzt das Gleichungssystem keine Lösung, eine eindeutige Lösung und unendliche viele Lösungen? Begründen Sie Ihre Ergebnisse ausführlich mithilfe des Rangs der Koeffizientenmatrix $A$ und der erweiterten Matrix $(A|\boldsymbol{b})$!

Die Matrix wird wie folgt auf ihre reduzierte Form gebracht.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ -3 & y-3 & 0 & -4 \\ -2 & 2y-6 & y+1 & y+5 \end{array}\right) \xrightarrow[z_3+2z_1]{z_2+3z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & y-3 & 0 & 5 \\ 0 & 2y-6 & y+1 & y+11 \end{array}\right) \xrightarrow{z_3-2z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & y-3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & y+1 & y+1 \end{array}\right)$$

Wir können folgende Fälle unterscheiden

- $y = 3$: $\text{Rang}(A) = 2, \text{Rang}(A|\boldsymbol{b}) = 3 \rightarrow \text{Rang}(A) \neq \text{Rang}(A|b)$
- $y = -1$: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|\boldsymbol{b}) = 2$
- $y \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 3\}$: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|\boldsymbol{b}) = 3$ .

Für den Fall $y = 3$ hat das Gleichungssystem keine Lösung, da $\text{Rang}(A) \neq \text{Rang}(A|b)$. Für $y = -1$ ergibt sich eine eindimensionale Lösungsschar mit unendlich vielen Lösungen. Für alle anderen Fälle, also für $z \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 3\}$, gibt es eine eindeutige Lösung abhängig von $y$.

c) (2.5 Punkte) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem für alle Fälle aus Unterpunkt a) in Abhängigkeit von $y$. Bestimmen Sie dafür die allgemeine Lösung für die unterschiedlichen Fälle und geben Sie für den Fall unendlich vieler Lösungen auch explizit den Kern$(A)$, dessen Bedeutung und Dimension an!

- Fall: $y = -1$
  Für diesen Fall gibt es unendlich viele Lösungen, also bestimmen wir die allgemeine Lösung, indem wir den Kern der Koeffizientenmatrix $A$ und eine beliebige Partikulärlösung der Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ bestimmen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

  Aus diesem Gleichungssystem folgt $x_1 = 3$ und $x_2 = -\frac{5}{4}$. Allgemein gilt, dass der Kern(A) die Lösung des homogenen Gleichungssystems, also von A$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, ist. Weiters gilt, dass die Dimension des Kerns gleich der Anzahl der Unbekannten minus des Rangs von A ist, also: dimKern$(A)$ = $n$ - Rang$(A)$

  Wir wählen $x_3 = s$ und geben die allgemeine Lösung des Gleichungssystems an

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{5}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R},$$

$$\text{mit} \quad \text{Kern}(A) = s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \text{dimKern}(A) = 1\,.$$

- Fall: $y \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 3\}$
  Für diesen Fall gibt es eine eindeutige Lösung und das bereits umgeformte Gleichungssystem sieht wie folgt aus

$$\begin{aligned} x_1 &= 3\,, \\ (y-3)x_2 &= 5\,, \\ (y+1)x_3 &= y+1\,. \end{aligned}$$

  Da wir den Fall $y \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 3\}$ behandeln, darf die zweite Zeile durch $y - 3$ und die dritte Zeile durch $y + 1$ dividiert werden, was die folgende eindeutige Lösung des Gleichungssystems ergibt

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{5}{y-3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 3\}.$$

- **Aufgabe 2.**

Die Räume $\mathbf{R}^3$ und $\mathbf{R}^2$ sind mit kanonischen Basen $E_3$ und $E_2$ ausgestattet.
Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ ist durch die Bilder der Vektoren der kanonischen Basis von $\mathbf{R}^3$, $E_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ definiert,

$$\varphi(\mathbf{e_1}) = \varphi\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}, \quad \varphi(\mathbf{e_2}) = \varphi\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \quad \varphi(\mathbf{e_3}) = \varphi\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}.$$

a) (1 Punkt) Geben Sie die Matrix Darstellung von $\varphi$ bezüglich der kanonischen Basen, $A = [\varphi(E_3)]_{E_2}$, an.

Wir bilden aus dem $\mathbf{R}^3$ in den $\mathbf{R}^2$ ab, benötigen also eine $2 \times 3$ Matrix. Die Bilder der Basisvektoren liefern die Spalteneinträge der gesuchten Matrix, da der Abbildung kanonische Basen zugrunde liegen. Wir erhalten also die Matrix

$$A = [\varphi(E_3)]_{E2} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & -3\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

als Darstellung von $\varphi$ bezüglich der kanonischen Basen.

b) (2 Punkte) Der Raum $\mathbf{R}^3$ wird jetzt mit der Basis $B$, der Raum $\mathbf{R}^2$ mit der Basis $C$ ausgestattet,

$$B = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}, \quad C = \left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}\right\}.$$

Berechnen Sie die Transformationsmatrizen zu den Basiswechsel von $B$ auf $E_3$, $T_{E_3 \leftarrow B}$, und von $E_2$ auf $C$, $T_{C \leftarrow E_2}$.

$T_{E_3 \leftarrow B}$ können wir einfach ablesen. Denn die Spalten dieser Matrix bestehen aus Koordinatenvektoren der Vektoren der Basis $B$ bezüglich der Basis $E_3$, d.h., es sind die Vektoren der Basis $B$ selbst. Dann haben wir

$$T_{E_3 \leftarrow B} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

Um die Matrix $T_{C \leftarrow E_2}$ aufzustellen müssen die Koordinaten der Basisvektoren der Basis $E_2$ bezüglich der Basis $C$ dargestellt werden, also zwei lineare Gleichungssysteme simultan gelöst werden,

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2 & -3 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1 & -2 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 1 & 0\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -2\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 1 & -2\end{array}\right).$$

Damit erhalten wir

$$T_{C \leftarrow E_2} = T^{-1}_{E_2 \leftarrow C} = \begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}.$$

c) (1 Punkt) Berechnen Sie die Darstellung von $\varphi$, $A' = [\varphi(B)]_C$, bezüglich der Basen $B$ und $C$.

$$A' = T_{C\leftarrow E_2} A T_{E_3\leftarrow B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -22 & 3 \\ 0 & -14 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) (2 Punkte) Gegeben seien Vektoren

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [\boldsymbol{v}]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Koordinaten des Bildes von $\boldsymbol{v}$, $[\varphi(\boldsymbol{v})]_C$, auf zwei verschiedene Arten.

Erste Möglichkeit besteht darin die Matrix $A' = [\varphi(B)]_C$ zu nützen,

$$[\varphi(\boldsymbol{v})]_C = A'[\boldsymbol{v}]_B = \begin{pmatrix} 1 & -22 & 3 \\ 0 & -14 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

Eine weitere Möglichkeit besteht darin die Matrix $A$ zu benützen. Wir berechnen zuerst $\varphi(\boldsymbol{v})$,

$$\varphi(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix} = [\varphi(\boldsymbol{v}]_{E_2}$$

Jetzt rechnen wir noch $[\varphi(\boldsymbol{v}]_{E_2}$ in $[\varphi(\boldsymbol{v}]_C$ um,

$$[\varphi(\boldsymbol{v}]_C = T_{C\leftarrow E_2}[\varphi(\boldsymbol{v}]_{E_2} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

- **Aufgabe 3.**

  Gegeben sei die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) (2 Punkte) Berechnen Sie die Eigenwerte von $M$ und deren algebraische Vielfachheit.

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 5 & -3 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ -3 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ = (3-\lambda)^2(6-\lambda) - 9(6-\lambda) = ((3-\lambda)^2 - 9)(6-\lambda) \\ = (\lambda^2 - 6\lambda)(6-\lambda) = -\lambda(6-\lambda)^2 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 6$$

Der Eigenwert $\lambda_1$ ist eine einfache Nullstelle von $P(\lambda)$, somit ist seine algebraische Vielfachheit $n_1 = 1$. $\lambda_2$ ist eine Nullstelle zweiter Ordnung, d.h. die algebraische Vielfachheit ist $n_2 = 2$.

b) (4 Punkte) Finden Sie die Eigenvektoren von $M$ und die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte. Geben Sie mit diesem Wissen die Jordansche Normalform $J$ der Matrix an. Das Berechnen der vollen Transformation $X$ (und damit ggf. der Hauptvektoren) ist nicht notwendig.

- $\lambda_1 = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{z_1 - \frac{5}{6} z_2 \\ z_3 - \frac{1}{6} z_2 \\ z_2 \cdot \frac{1}{6}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{z_3 + z_1 \\ z_1 \cdot \frac{1}{3}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \implies x_1 - x_3 = 0 \implies x_3 = x_1 \\ x_2 = 0 \end{aligned}$$

Wähle $x_1$ als (einzigen) freien Parameter.

$$\implies v_1 = (1, 0, 1)^T$$

Der Eigenraum zu $\lambda_1$ wird durch einen Vektor $v_1$ aufgespannt, d.h. die geometrische Vielfachheit von $\lambda_1$ ist $g_1 = 1$. (Es gilt auch: $1 \leq g_1 \leq n_1 = 1 \implies g_1 = 1$)

- $\lambda_2 = 6$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{z_3 - z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{z_1 + \frac{5}{4} z_3 \\ z_3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{z_1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \\ z_2 \leftrightarrow z_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \implies x_1 + x_3 = 0 \implies x_3 = -x_1 \\ x_2 = 0 \end{aligned}$$

Wir sehen, dass wir, wie vorhin, nur einen Parameter frei wählen können. Also gibt es nur einen Eigenvektor $v_2$ der den Eigenraum zu $\lambda_2$ aufspannt. Wir wählen $x_1$ als Parameter und erhalten

$$v_2 = (1, 0, -1)^T.$$

Die geometrische Vielfachheit von $\lambda_2$ ist daher $g_2 = 1$. Der verbleibende Hauptvektor von $\lambda_2$ muss nicht berechnet werden, allerdings können wir die Jordansche Normalform auch ohne ihn angeben

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$