1. Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + (s+1)x_3 + \quad sx_4 &= 1 \\ 2x_1 + 6x_2 + \qquad\quad 2x_3 + 2sx_4 &= 0 \\ sx_1 + 2x_2 + (s+1)x_3 + \quad x_4 &= 1. \end{aligned}$$

   (a) Geben Sie die Koeffizientenmatrix A und die Inhomogenität $\boldsymbol{b}$ des Gleichungssystems an.

   (b) Bestimmen Sie den Rang von A und den Rang der erweiterten Matrix $(A|\boldsymbol{b})$ in Abhängigkeit von s. Für welche Werte von $s \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem keine Lösung, eine eindeutige Lösung, unendlich viele Lösungen?

   (c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems (falls sie existiert) in Abhängigkeit von s. Beachten Sie die Fallunterscheidung von Unterpunkt (b) und nehmen Sie an, dass $s \neq -1$ gilt.

2. Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit von einem Parameter $p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 + (p-5)x_3 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 + (p-6)x_3 + 2x_4 &= 2, \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 + 2x_4 &= 4, \\ x_1 - 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

   (a) Geben Sie die Koeffizientenmatrix A und die Inhomogenität $\boldsymbol{b}$ des Gleichungssystems an.

   (b) Bestimmen Sie den Rang von A und den Rang der erweiterten Matrix $(A|\boldsymbol{b})$. Für welche Werte von p gibt es (i) keine Lösung, (ii) genau eine Lösung, (iii) unendlich viele Lösungen?

   (c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems für $p = 1$.

3. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ in der Form

$$(A|\,\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{array}\right)$$

Elementare Zeilenumformungen führen auf das System

$$(A'|\,\boldsymbol{b}') = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 0 \end{array}\right)$$

(a) Wenn $\boldsymbol{x}$ eine Lösung von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist, gilt dann auch $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$? Falls ja, gilt auch die Umkehrung? Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Bestimmen Sie Rang von A. Bestimmen Sie den Rang von A'. Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Bestimmen Sie den Rang von $(A|\boldsymbol{b})$. Bestimmen Sie den Rang von $(A|\boldsymbol{b})$. Begründen Sie Ihre Antwort!

(d) Bestimmen Sie die Dimension des Kerns von A? Bestimmen Sie die Dimension des Kerns von A'? Begründen Sie Ihre Antwort!

(e) Geben Sie eine Basis vom Bild von A an. Ist die Basis eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort!

(f) Existiert eine Partikulärlösung des Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$? Begründen Sie Ihre Antwort!

(g) Ist die Lösung von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort!

4. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ in der Form

$$(A|\,\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -4 & 2 & 6 & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 4 & 12 & -2 \\ 6 & 4 & -8 & -6 & -18 & 4 \end{array}\right)$$

Elementare Zeilenumformungen führen auf das System

$$(A'|\,\boldsymbol{b}') = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

(a) Welches Gleichungssystem sollte gelöst werden, um den Kern von A zu bestimmen?

(b) Welche Dimension hat $\mathrm{Kern}(A)$? Berechnen Sie eine Basis für den Kern von A.

(c) Geben Sie mit Hilfe des Kerns alle Lösungen des Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ an!

5. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5$ in der Form

$$(A|\ \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & \alpha \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \delta \end{array}\right)$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Elementare Zeilenumformungen führen auf das System

$$(A'|\ \boldsymbol{b}') = \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & \beta + \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3\delta - 3\gamma - \beta + \alpha \end{array}\right)$$

(a) Wenn $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5$ eine Lösung von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist, gilt dann auch $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$? Falls ja, gilt auch die Umkehrung?

(b) Bestimmen Sie den Rang von A und den Rang von A'.

(c) Bestimmen Sie den Rang von $c|cA \quad \boldsymbol{b}$ und den Rang von $c|cA' \quad \boldsymbol{b}'$ in Abhängigkeit von $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

(d) Geben Sie eine Basis B vom Bild von A an. Ist die Basis eindeutig?

(e) Für welche Werte $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ eine Partikulärlösung?

(f) Bestimmen Sie die Dimension des Kerns von A und die Dimension des Kerns von A'.

(g) Berechnen Sie eine Basis K vom Kern von A.

(h) Falls eine Partikulärlösung von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ existiert, ist diese eindeutig?

(i) Berechnen Sie für $\alpha = \beta = 12$ und $\gamma = \delta = 0$ eine mögliche Partikulärlösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5$. Geben Sie mit den bisher gefundenen Informationen die allgemeine Lösung in diesem konkreten Fall an.

6. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit einem Parameter $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & a\,x_3 & = & 3, \\ x_1 & + & a\,x_2 & + & 3x_3 & = & 2. \end{array}$$

(a) Elementare Zeilenumformungen führen zu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & -(a+3)(a-2) & -(a-2) \end{array}\right).$$

Berechnen Sie, abhängig vom Wert von a, den Rang der Koeffizentenmatrix des obigen Gleichungssystems A und der erweiterten Matrix $(A|b)$.

(b) Für welche Werte von a existiert keine, eine oder mehrere Lösungen?

(c) Beschränken Sie sich im Folgenden auf jene Wertebereiche von a, für welche das Gleichungssystem lösbar ist.

(i) Geben Sie, abhängig von a, eine Basis des Kerns und des Bildes von A an.

(ii) Welche Dimension hat der Kern und das Bild von A abhängig von a?

(d) Geben Sie die allgemeine Lösung für jene Werte von a an, für die

(i) eine Schar von Lösungen existiert.

(ii) genau eine Lösung existiert.