1. Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Überprüfen Sie φ auf Linearität.
   (b) Bestimmen Sie eine Basis von Kern und Bild der Abbildung φ.
   (c) Verifizieren Sie an diesem Beispiel die Beziehung $\operatorname{Rang}(A) = \dim\big(\operatorname{Bild}(\varphi)\big)$.
   (d) Untersuchen Sie, ob φ injektiv, surjektiv bzw. bijektiv ist.

2. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ mit $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, -1)^T$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{v}_3 = (1, 0, 0)^T$.

   (a) Zeigen Sie, dass B eine Basis von V ist.
   (b) Stellen Sie $\boldsymbol{v} = (3, 3, 1)^T$ als Linearkombination von B dar und bestimmen Sie den Koordinatenvektor $[\boldsymbol{v}]_B$.
   (c) Berechnen Sie $\boldsymbol{u}$ für $[\boldsymbol{u}]_B = (3, 2, 1)^T$.
   (d) Berechnen Sie $[\boldsymbol{v}]_{E_3}$ für die kanonische Basis E_3.

3. Sei die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_3 \end{pmatrix},$$

   weiters sei $\boldsymbol{v} = (4, -1, -3)^T$ sowie B eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und C eine Basis des $\mathbb{R}^2$, mit

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

   (a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $A = [\varphi(E_3)]_{E_2}$ bezüglich der kanonischen Basen E_3 und E_2.
   (b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[\varphi(B)]_C$ bezüglich der Basen C und B durch direktes Ausrechnen.
   (c) Ermitteln Sie die Transformationsmatrizen $T = T_{B \leftarrow E_3}$ und $S = T_{C \leftarrow E_2}$ und berechnen Sie die Abbildungsmatrix $[\varphi(B)]_C$ mit Hilfe dieser Koordinatentransformationen und der Abbildungsmatrix aus (a).
   (d) Berechnen Sie $[\boldsymbol{v}]_B$ und ermitteln Sie $[\varphi(\boldsymbol{v})]_C$ unter Verwendung der Matrix $[\varphi(B)]_C$.

4. Sei $V = P_n$ der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich $n \in \mathbb{N}_0$ und sei $B = \{1, x, \ldots, x^n\}$ die kanonische Basis im Vektorraum der Polynome. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität. Geben Sie im Falle der Linearität die Matrix der Abbildung bezüglich der kanonischen Basen der angegebenen Vektorräume an und bestimmen Sie jeweils das Bild und den Kern der Abbildung φ.

   (a) $\varphi : P_n \to P_n,\ \varphi(p) = p' - p = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - p$ (b) $\varphi : P_n \to \mathbb{R},\ \varphi(p) = \int_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x$