1. Betrachten Sie die lineare Abbildung
$$\varphi\colon P_2 \to P_1, \quad \varphi(p) = p' + \int_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x.$$
Bestimmen Sie $[\varphi(B)]_C$ bezüglich der Basen
$$B = \left\{1, x, x^2\right\}, \qquad C = \{x+1, x-1\}.$$
Berechnen Sie das Bild und den Kern der Abbildung φ und beurteilen Sie ob die lineare Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

2. In Aufgabe 2 im Vorlesungsskriptum zu Dualräumen wurde eine duale Basis von V^*, wobei $V = \mathbb{R}^2$, berechnet. Fassen Sie nun die beiden Vektoren b^1, b^2 als Vektoren in $V = \mathbb{R}^2$ auf und berechnen Sie erneut die duale Basis hiervon.

3. Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definiert durch
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie $\det A$ mit Hilfe der Rechenregeln für Determinanten.

4. Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ definiert durch
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie die Determinante $\det A$ unter Verwendung des Entwicklungssatzes auf zwei verschiedene Arten.

5. Betrachten Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definiert durch
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Zeigen Sie, dass mittels des Gauß-Algorithmus die Zeilenstufenform
$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$
erhalten werden kann. Führen Sie nun die Multiplikation $L \cdot U$ durch, wobei die Matrix $L \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben ist durch
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Welche Beobachtung machen Sie? Berechnen Sie mithilfe dieser Erkenntnis $\det A$.