1. Betrachten Sie den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ und den Unterraum $U = \mathcal{L}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$, wobei

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Hinweis: Eine geometrische Interpretation erspart Rechenaufwand.

   (a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis B von U.

   (b) Berechnen Sie die Orthonormalprojektion von $\boldsymbol{u}$ bezüglich der Orthonormalbasis B, wobei $\boldsymbol{u} = (4, 7, 5)^T$.

   (c) Wie lässt sich Ihr Ergebnis aus (b) erklären?

2. Betrachen Sie den Vektorrraum $V = P_2$ der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 mit einem inneren Produkt und der induzierten Norm

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}.$$

   (a) Betrachten Sie den Unterrraum U von V. Eine Basis B von U sei gegeben durch $B = \{b_1, b_2\} = \{x + 1, x^2 + x\}$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von B bezüglich des gegebenen Skalarprodukts mithilfe des Gram Schmid'schen Orthonormalisierungsverfahrens.

   (b) Ergänzen Sie die in (a) berechnete Orthonormalbasis B zu einer Orthogonalbasis von P_2. Die Normierung des neuen Vektors ist nicht notwendig.

3. Betrachen Sie den Vektorraum $V = P_2$ der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2.

   (a) Welche der folgenden Abbildungen definiert ein Skalarprodukt und welche nicht? Begründen Sie!

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_1 : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle_1 = \int_{-\infty}^{1} f(x) \cdot e^{-x} \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_2 : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle_2 = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot \sin(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_3 : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle_3 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2 \cdot f(x) \cdot \cos(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

Für den Rest des Beispiels verwenden Sie

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\cdot e^{-x}\cdot g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle}$$

als Sklarprodukt bzw. induzierte Norm. Sie müssen nicht beweisen, dass es sich hierbei tatsächlich um ein Skalarprodukt handelt.

(b) Betrachten Sie den Unterraum U von V. Eine Basis B von U sei gegeben durch $B = \{b_1, b_2\} = \{3, x-2\}$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U mithilfe des Gram Schmid'schen Orthonormalisierungsverfahrens.

4. Gegeben sei $V = \mathbb{R}^4$ versehen mit dem kanonischen inneren Produkt. Weiters sei $U = \mathcal{L}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ ein Unterraum von V, wobei

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U mithilfe des Gram-Schmid'shen Orthonormalisierungsverfahrens.

(b) Betrachen Sie den Vektor $\boldsymbol{v} \in V$, wobei $\boldsymbol{v} = (2,3,4,1)^T$. Berechnen Sie die Orthogonalprojektion von $\boldsymbol{v}$ auf den Unterraum U.

(c) Gegeben sei der Vektor $\boldsymbol{w} \in V$, wobei $\boldsymbol{w} = (1,1,1,1)^T$. Berechnen Sie $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|_2$

5. (UE-Skriptum 5.33) Betrachen Sie den euklidischen Vektorraum $V = (C[0,\infty), \langle .,. \rangle$, wobei das Skalarprdukt und die induzierte Norm gegeben sind durch

$$\langle f,g\rangle = \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x} f(x) g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle}.$$

Lassen Sie sich nicht davon abhalten, dass Sie hier uneigentliche Integrale berechnen müssen. Das ist der einzige UNterschied zu der Standardsituation, wo über endliche Intervalle integriert wird.
Bemerkung: Im Vektorraum V liegen alle auf $[0,\infty)$ stetigen Funktionen, für die gilt

$$\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \sqrt{\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x} f(x)^2\,\mathrm{d}x} < \infty.$$

(a) Betrachen Sie den Unterraum U von v mit der Basis $B = \{b_1, b_2\} = \{1, x\}$, d.h. $U = \{p(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von B bezüglich des gegebenen Skalarprodukts mithilfe des Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahrens.

(b) Berechnen Sie die Orthogonalprojektion von $v(x) = x^2 \in V$ auf den Unterraum U.

6. (UE-Skripum 5.34) Betrachten Sie den euklidischen Vektorraum $V = (C[-1,1], \langle .,. \rangle$, wobei das Skalarprdukt und die induzierte Norm gegeben sind durch

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

(a) Betrachten Sie den Unterraum U von V mit der Basis $B = \{b_1, b_2\} = \{1, x\}$, d.h. $U = \{p(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von B bezüglich des gegebenen Skalarprodukts mithilfe des Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahrens.

(b) Berechnen Sie die Orthogonalprojektion von $v(x) = -\mathrm{e}^x \in V$ auf den Unterraum U.