1. Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ durch
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & 6 & -4 & -4 \\ 22 & 15 & -8 & -9 \\ -3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
   (a) Das charakteristische Polynom von A lautet
   $$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2.$$
   Somit hat A einen algebraisch doppelten Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und einen algebraisch doppelten Eigenwert $\lambda_2 = -1$. Berechnen Sie die Eigenvektoren und gegebenenfalls die Hauptvektoren von A.

   (b) Bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform J und die Transformationsmatrix X von A, für welche die Zerlegung $A = XJX^{-1}$ gilt. Ist A diagonalisierbar?

2. Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ durch
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ und $\lambda_3 = \frac{5}{2}$ Eigenwerte von A sind.

   (b) Bestimmen Sie jeweils die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte von A.

   (c) Bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform J und die Transformationsmatrix X von A. Besitzt A eine Eigenbasis?

3. Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ durch
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Bestimmen Sie zum Eigenwert $\lambda = 2$ einen zugehörigen Eigenvektor.

   (b) Zeigen Sie, dass $p(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda$ das charakteristische Polynom von A ist und berechen Sie alle Eigenwerte.

   (c) Begründen Sie, ob die Matrix A regulär oder singulär ist.

   (d) Bestimmen Sie die Definitheit der Matrix A und begründen Sie diese.

   (e) Berechen Sie eine reguläre Matrix $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, welche die Matrix A diagonalisiert.

4. Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und gegeben Sie die Bedingung für die Eigenwerte an. Vereinfach Sie soweit wie möglich.

(b) Die Eigenwerte von A sind $\lambda_{1,2} = -1$ und $\lambda_3 = 2$. Geben Sie algebraische und geometrische Vielfachheiten an und bestimmen Sie Eigenvektoren und ggf. Hauptvektoren.

(c) Geben Sie die Jordan'sche Normalform J und die Transformationsmatrix X an, wobei gilt $AX = XJ$.