1. Wir betrachten das homogene System 1. Ordnung

$$\boldsymbol{y}'(t) - A\boldsymbol{y}(t) = 0$$

mit konstanter Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Geben Sie eine Formel für die allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}(t)$ des Systems in den folgenden Fällen an:

   (a) A ist nicht diagonalisierbar und hat zwei unterschiedliche reelle Eigenwerte: λ_1 (mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1) und λ_2 (mit algebraischer Vielfachheit 1 und geometrischer Vielfachheit 1); $\boldsymbol{v}^{(1)}$ ist der Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 und $\boldsymbol{h}^{(1)}$ ist der zugehörige Hauptvektor; $\boldsymbol{v}^{(2)}$ ist der Eigenvektor zum Eigenwert λ_2.

   (b) A ist diagonalisierbar mit drei unterschiedlichen reellen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und zugehörigen Eigenvektoren $\boldsymbol{v}^{(1)}$, $\boldsymbol{v}^{(2)}$, $\boldsymbol{v}^{(3)}$.

   (c) A ist nicht diagonalisierbar und hat den Eigenwert λ (mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 1); $\boldsymbol{v}$ ist der Eigenvektor zum Eigenwert λ, $\boldsymbol{h}^{(1)}$ ist ein zugehöriger Hauptvektor erster Stufe und $\boldsymbol{h}^{(2)}$ ist ein zugehöriger Hauptvektor zweiter Stufe.

   (d) Die Matrix A ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Gegeben ist das folgende lineare AWP 1. Ordnung:

$$\boldsymbol{y}'(t) - A\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t), \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0, \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ (mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1) und $\lambda_2 = 2$ (mit algebraischer Vielfachheit 1 und geometrischer Vielfachheit 1); $\boldsymbol{v}^{(1)} = (1,0,0)^T$ ist der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$ und $\boldsymbol{h}^{(1)} = (0,-1,1)^T$ ist der zugehörige Hauptvektor; $\boldsymbol{v}^{(2)} = (1,2,2)^T$ ist der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$.

   (a) Geben Sie eine allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}_h(t)$ des homogenen Problems an.

   (b) Geben Sie eine Partikulärlösung $\boldsymbol{y}_p(t)$ des inhomogenen Problems für $\boldsymbol{f}(t) = (2,1,0)^T e^t$ an. Verwenden Sie den Ansatz $\boldsymbol{y}_p(t) = \boldsymbol{a}\, e^t$ mit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$.

   (c) Seien $\boldsymbol{y}_h(t)$ und $\boldsymbol{y}_p(t)$ die Lösungen aus (a) und (b). Wie müssen Sie $\boldsymbol{y}_h(t)$ und $\boldsymbol{y}_p(t)$ kombinieren, um die allgemeine Lösung des inhomogen Problems $\boldsymbol{y}'(t) - A\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t)$ zu erhalten? Von wie vielen freien Parametern hängt sie ab? Berechnen Sie die Lösung $\boldsymbol{y}(t)$ des AWPs für $\boldsymbol{y}_0 = (3,2,1)^T$.

   (d) Geben Sie eine Lösung $\boldsymbol{y}(t)$ des homogenen AWPs für $\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{y}_0 = (1,0,1)^T$ an. Verwenden Sie Ihre Lösung aus (a) als Ansatz.

3. Gegeben sei das lineare Anfangswertproblem 1. Ordnung

$$\boldsymbol{y}'(t) - A\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t), \qquad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$$

mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}(t) = \sin(3t) \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(3t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Lösen Sie das Eigenwertproblem $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$.
Hinweis: Die Matrix A ist diagonalisierbar.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Problems.

(c) Bestimmen Sie eine Partikulärlösung des inhomogenen Problems.

(d) Lösen Sie das gegebene Anfangswertproblem.

4. Gegeben sei das lineare Anfangswertproblem 1. Ordnung

$$\boldsymbol{y}'(t) - A\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t), \qquad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$$

mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & -9 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}(t) = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Weiters ist die Eigenwertstruktur von A gegeben durch

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{h}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = 3,\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = -3,\ \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung des homogenen Problems an.

(b) Bestimmen Sie eine Partikulärlösung des inhomogenen Problems.

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $\boldsymbol{y}_p(t) = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$, wobei $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, 4$ zu bestimmen sind.

(c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems und lösen Sie das Anfangswertproblem.

5. Gegeben sei das lineare Anfangswertproblem

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f}(t), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 9 & -9 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}(t) = -t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Weiters ist die Eigenwertstruktur von A gegeben durch

$$\lambda_1 = 1,\ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 3\mathrm{i},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3\mathrm{i} \\ -9 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = -3\mathrm{i},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3\mathrm{i} \\ -9 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Partikulärlösung des inhomogenen Problems.

(b) Geben Sie die allgemeine reellwertige Lösung des homogenen Problems an.

(c) Bestimmen Sie eine Partikulärlösung des inhomogenen Problems.

(d) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems und lösen Sie das Anfangswertproblem.

6. Gegeben sei das lineare Anfangswertproblem

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte, Eigenvektoren und gegebenenfalls Hauptvektoren der Matrix A.

(b) Geben Sie die allgemeine reellwertige Lösung des homogenen Systems an.

(c) Bestimmen Sie eine Partikulärlösung des inhomogenen Problems.

(d) Lösen Sie das gegebene Anfangswertproblem.

7. Gegeben sei das lineare System 2. Ordnung

$$y'' + py' + qy = 0.$$

(a) Führen Sie das System 2. Ordnung in ein System der Form $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ über.

(b) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom der Matrix A aus (a) gegeben ist durch $p(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$.

(c) Für $p = -5$ und $q = 4$ sind Lösungen des Systems 2. Ordnung durch $y_1(t) = \mathrm{e}^t$ und $y_2(t) = \mathrm{e}^{4t}$ gegeben. Wie lauten die entsprechenden Lösungen für $\boldsymbol{x}$ aus (a)?

(d) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{x}_1(t)$ und $\boldsymbol{x}_2(t)$ aus (c) linear unabhängig sind.