1. Betrachten Sie $\mathbb{R}^3$, die Menge aller räumlichen Spaltenvektoren. Weisen Sie nach, dass diese Menge, ausgestattet mit dem Kreuzprodukt, kein Monoid darstellt. Gibt es für das Kreuzprodukt ein Element $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^3$, welches die Rolle eines neutralen Elements einnimmt? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Geben Sie die Verknüpfungstabelle für die Addition $\oplus$ und die Multiplikation $\odot$ modulo 5in $\mathbb{Z}_5$ an. Begründen Sie, dass $\mathbb{Z}_5$ mit den so definierten Verknüpfungen einen Körper bildet.

3. Zeigen Sie, dass jede komplexe Zahl $z = a + ib \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ein multiplikatives inverses Element besitzt, von der Form
$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a^2+b^2}.$$

4. (UE-Skriptum 1.9) Zeigen Sie, dass der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ als direkte Summe der Unterräume U, V darstellbar ist.
$$U = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}, \quad V = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

5. (UE-Skriptum 1.10 (b),(c)) Sind die Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ jeweils linear ab- oder unabhängig im Vektorraum $\mathbb{R}^3$?
   (a) $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,0)^T, \boldsymbol{v}_2 = (1,2,0)^T, \boldsymbol{v}_3 = (1,2,3)^T$
   (b) $\boldsymbol{v}_1 = (0,0,2)^T, \boldsymbol{v}_2 = (1,2,1)^T, \boldsymbol{v}_3 = (1,2,3)^T$

6. (UE-Skriptum 1.15) Sei $V = \mathbb{R}^3$. Untersuchen Sie, ob die Menge W ein Unterraum vom Vektorraum V ist. Wenn ja, berechnen Sie die Dimension und eine Basis von W.
   (a) $W = \{\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \colon 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
   (b) $W = \{\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \colon 2x_1 + x_2 + x_3 = 4\}$

7. (UE-Skriptum 1.17) Seien U, V Unterräume von $\mathbb{R}^4$ gegeben durch
$$U = \{\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \colon x_2 + x_3 + x_4 = 0\},$$
$$W = \{\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_2 = 0,\ x_3 - 2x_4 = 0\}.$$
   (a) Bestimmen Sie jeweils die Dimension und eine Basis von $U, W, U \cap W, U + W$
   (b) Überprüfen Sie anhand dieses Beispiels die Aussage
$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$