1. Sei P_2 der Polynomraum aller Polynome vom Grad kleiner gleich 2, gegeben durch

$$P_2 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \colon a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Betrachten Sie die Basis $B_1 = \{p_1, p_2, p_3\} = \{x^2 + 2x,\ x - 2, x^2 - 2\}$ und die sogenannte Monombasis $B_2 = \{b_1, b_2, b_3\} = \{1, x, x^2\}$.

   (a) Zeigen Sie, dass sowohl B_1 als auch B_2 eine Basis von P_2 bilden.

   (b) Bestimmen Sie die Dimension von P_2.

   (c) Berechnen Sie für $q(x) = 3\,x^2 + 5\,x - 10$ die Koordinatenvektoren $[q]_{B_1}$ und $[q]_{B_2}$.

2. Gegeben seien zwei Basen E_2 und B des Vektorraums $\mathbb{R}^2$ definiert durch

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\},$$

wobei E_2 die sogenannte kanonische Basis ist.

   (a) Zeigen Sie, dass sowohl E_2 als auch B eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden.

   (b) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathbb{R}^2$.

   (c) Berechnen Sie für $[\boldsymbol{v}]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ den Koordinatenvektor $[\boldsymbol{v}]_{E_2}$ und den Vektor $\boldsymbol{v}$.

3. (UE-Skriptum 2.2) Gegeben seien zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ definiert durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A + B$, $3B$, $-2B$, $A + 2B$, $B - A$, A^T, B^T.

4. (UE-Skriptum 2.4) Sei $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der Vektorraum aller 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$.

   (a) Zeigen Sie, dass B gegeben durch

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

   eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ darstellt.

   (b) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor $[A]_B$ von $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

   (c) Bestimmen Sie die Dimension von $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ und im allgemeinen Fall $V = \mathbb{R}^{m\times n}$.

5. (UE-Skriptum 2.5) Gegeben seien die Matrizen A, B, C definiert durch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A \cdot B$ und $B \cdot C$.

6. (UE-Skriptum 2.7 (b), (c)) Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, x \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.
Bestimmen Sie $\operatorname{Rang} A$ und $\operatorname{Rang}(A|\boldsymbol{b})$. Beurteilen Sie anhand Ihrer Ergebnisse, ob das lineare Gleichungssystem lösbar ist.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

7. (UE-Skriptum 2.8) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{Rang} A$ und $\operatorname{Rang}(A|\boldsymbol{b})$. Welche Bedingung an $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ muss erfüllt sein, sodass das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lösbar ist?

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{Rang} A$ und $\operatorname{Rang}(A|\boldsymbol{b})$ für die folgenden Werte. Beurteilen Sie anhand Ihrer Ergebnisse, ob das lineare Gleichungssystem lösbar ist.

a	b	c	d
0	0	0	0
1	2	3	4
-1	2	-3	4