Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
WS 2022

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

1. Test (FR, 09.12.2022) *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt.* —

— *Unterlagen: eigene VO-Skripten und ein handgeschriebener A4-Schummelzettel. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung bei der Ausarbeitung auf Papier dienen ausschließlich die in die entsprechenden $\boxed{\textit{Kästchen}}$ eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. □

- **Aufgabe 1.**
  Sei $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der Vektorraum aller 2×2 Matrizen über $\mathbb{R}$.

a) (2.5 Punkte) Zeigen Sie, dass B gegeben durch

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ darstellt. Argumentieren Sie ausführlich.

Die Linearkombination $s_1B_1 + s_2B_2 + s_3B_3 + s_4B_4 = 0$ ergibt

$$s_1 \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + s_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit die Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} I & II \\ III & IV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s_1 + 6s_2 - s_3 + s_4 & -2s_1 + s_2 + 3s_3 \\ s_1 + s_3 - 2s_4 & -s_1 + 2s_2 - s_3 + s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$III + IV \Rightarrow s_4 = 2s_2$. Durch Einsetzen in Gleichung IV erhält man $s_1 = 4s_2 - s_3$. Aus weiterem Einsetzen der beiden Ergebnisse in Gleichung II ergibt sich $s_3 = -7s_2$. Letztendlich erhält man durch Einsetzen in Gleichung I $s_2 = 0$ und somit $s_1 = s_3 = s_4 = 0$. Da $\dim \mathbb{R}^{2\times 2} = 4$ gilt und die 4 Basiselemente wie oben gezeigt linear unabhänging sind, kann mithilfe von $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ jede beliebige Matrix aus dem $\mathbb{R}^{2\times 2}$ gebildet werden, weswegen B eine Basis bildet.

b) (1.5 Punkte) Bestimmen Sie für den Koordinatenvektor $[A]_B = (3, -2, 4, 2)^T$ die dazugehörige Matrix A. Ist dies der einzige Koordinatenvektor, mit dem sich die Matrix A mithilfe von B darstellen lässt? Begründen Sie anhand von a).

Die Matrix A wird mittels Linearkombination der Basisvektoren berechnet.

$$A = s_1 B_1 + s_2 B_2 + s_3 B_3 + s_4 B_4 = 3\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Durch ausmultiplizieren und addieren erhalten wir

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}.$$

Da wir in a) gezeigt haben, dass es sich bei B um eine Basis des Vektorraumes V handelt, deren Dimension $\dim B = 4$ beträgt, kann $[A]_B$ nur der einzige Koordinatenvektor sein, mit dem die Matrix A mithilfe der Basis B dargestellt werden kann.

c) (0.5 Punkte) Wie viele Elemente besitzt eine Basis des Vektorraumes W = $\mathbb{R}^{6\times 4}$?

Die Dimension von W lautet dim $W = 24$, somit können in W genau $6 * 4 = 24$ Basiselemente eine Basis bilden.

(d) (1.5 Punkte) Die Menge der (2×2)-Matrizen versehen mit der üblichen Addition $(\mathbb{R}^{2\times 2}, +)$ bildet eine kommutative Gruppe. Begründen Sie, warum diese gemeinsam mit der üblichen Matrizenmultiplikation $(\mathbb{R}^{2\times 2}, \cdot)$ einen Ring bildet.

Für einen Ring benötigen wir eine kommutative Gruppe bzgl der Addition, eine Halbgruppe bezüglich der Multiplikation und das Distributivgesetzt muss erfüllt sein.
Wir wissen bereits, dass $(\mathbb{R}^{2\times 2}, +)$ eine kommutative Gruppe bildet, also benötigen wir nur noch, dass $(\mathbb{R}^{2\times 2}, \cdot)$ eine Halbgruppe bildet und das Distributivgesetzt erfüllt ist.

(i) Assoziativität: $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}\colon (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
Matrizen ausmultiplizieren und Ergebnisse vergleichen.

(ii) Distributivgesetzt: $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}\colon A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
Matrizen ausmultiplizieren, addieren und Ergebnisse vergleichen.

- **Aufgabe 2.**

a) (2 Punkte) Gegeben seien zwei Unterräume des Vektorraums $V = \mathbb{R}^5$,

$$U = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 : x_5 + x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$
$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 = 0, \quad x_5 - x_4 = 0, \quad 4x_5 - x_3 = 0 \right\}$$

Finden Sie jeweils eine Basis sowie die Dimension von U und W.

Wir fangen mit U an. Da es nur durch eine Gleichung definiert ist, können wir sogleich 4 Elemente durch Konstanten ausdrücken. Wir wählen $x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = \gamma$, und für das nicht vorkommende $x_4 = \delta$. Damit ist $x_5 = -\alpha - \beta - \gamma$, und wir können den Vektor $\boldsymbol{u} \in U$ schreiben als

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ -\alpha - \beta - \gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Basis und die Dimension lauten dann

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \dim U = 4.$$

Da x_1 und x_2 nur in der ersten Gleichung vorkommen, setzen wir $x_1 = \alpha$. Für die letzten beiden Gleichungen wählen wir $x_4 = \beta$ und erhalten $x_5 = \beta, \quad x_3 = 4\beta$. Wir schreiben wieder einen allgemeinen Vektor an

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 4\beta \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Basis und die Dimension sind somit

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \dim W = 2.$$

b) (1,5 Punkte) Finden Sie nun eine Basis für den Durchschnitt der zwei Unterräume $U \cap W$ und bestimmen Sie die Dimension.

Ein Vektor aus dem Durchschnitt zweier Unterräume erfüllt gleichzeitig die Bedingungen beider Räume. Wir fassen also aus a) zusammen

$$U \cap W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 : x_5 + x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 + x_2 = 0, \quad x_5 - x_4 = 0, \quad 4x_5 - x_3 = 0 \right\}.$$

Wir haben somit das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} -x_1 & -x_2 & -x_3 & & x_5 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & & & & = 0 \\ & & & -x_4 & +x_5 & = 0 \\ & & -x_3 & & +4x_5 & = 0 \end{array} \quad .$$

Aufgrund der zweiten Gleichung folgt, dass $-x_1 - x_2 = 0$. Wenn wir das in die erste Gleichung einsetzen und mit der letzen und vorletzten vergleichen, können wir schließen

$$\frac{1}{4}x_3 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_4 = 0.$$

Es bleibt nur die zweite Gleichung. Wir wähen $x_1 = \alpha$. Dadurch ist ein Vektor $\boldsymbol{w} \in U \cap W$ gegeben als

$$\boldsymbol{w} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Basis besitzt somit nur ein Element

$$B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \dim (U \cap W) = 1.$$

c) (2,5 Punkte) Die Unterräume U und W schneiden sich auf einer Geraden in der x_1-x_2-Ebene. Ermitteln Sie die Dimension für die Summe $U + W$ mit dem Dimensionssatz für Unterräume, und überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie auch für $U + W$ eine passende Basis finden.

Mit dem Hinweis zum Schnittpunkt der zwei Unterräume oder mit dem Ergebnis von Aufgabe b) wissen wir, dass $\dim(U \cap W) = 1$. Wir setzen die Ergebisse aus a) in den Dimensionssatz ein

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 4 + 2 - 1 = 5.$$

Die Summe $U + W$ wird von der Linearkombination der Basen aus a) aufgespannt

$$U + W = \mathcal{L}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2).$$

Da sowohl U als auch W Unterräume von $\mathbb{R}^5$ sind, können diese 6 Vektoren nicht linear unabhängig sein.

Wir überprüfen zuerst den Basisvektor $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf lineare Abhängigkeit mit den Basisvektoren von U. Hierbei handelt es sich um einen Basisvektor des Durchschnittes $U \cap W$. Dieser kann also mit der Basis von U konstruiert werden und ist somit linear abhängig bezüglich dieser Basis. Eine kurze Rechnung führt auf das gleiche Ergebnis.

Wir betrachten folglich den Vektor $\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit die Linearkombination 0 ergibt, muss gelten

$$\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{u}_3 + \lambda_4 \boldsymbol{u}_4 + \lambda_5 \boldsymbol{w}_2 = 0.$$

Das ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccl}
\lambda_1 & & & & & = 0 \\
 & \lambda_2 & & & & = 0 \\
 & & \lambda_3 & & +4\lambda_5 & = 0 \\
 & \lambda_2 & & +\lambda_4 & +\lambda_5 & = 0 \\
-\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & & +\lambda_5 & = 0
\end{array} .$$

Daraus folgt, dass $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 0$. In die letzte Gleichung eingesetzt, ergibt das $-\lambda_3 + \lambda_5 = 0$. Verglichen mit der dritten und vierten Gleichung, können wir schließen, dass $\lambda_3 = \lambda_5 = \lambda_4 = 0$.

Da alle Koeffizienten $\lambda_i = 0$ sind, sind die Vektoren linear unabhängig und die Basis für $U + W$ lautet

$$B_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \dim(U + W) = 5.$$

Aus dem Dimensionssatz ergibt sich

$$5 = 4 + 2 - 1.$$

- **Aufgabe 3.**
  Das folgende lineare Gleichungssystem mit $\alpha \in \mathbb{R}$ ist gegeben.

$$\begin{aligned}
(\alpha+2)x_1 + \quad x_2 \qquad\qquad\qquad &= \alpha + 4 \\
2x_2 \qquad\qquad\qquad &= 4 \\
(2\alpha+4)x_1 \qquad\quad + (\alpha+1)x_3 &= 2\alpha + 5
\end{aligned}$$

a) (0.5 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizientenmatrix A und die Inhomogenität $\boldsymbol{b}$ des linearen Gleichungssystems.

Die Koeffizientenmatrix und die Inhomogenität des linearen Gleichungssystems lauten wie folgt.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha+2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2\alpha+4 & 0 & \alpha+1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \alpha+4 \\ 4 \\ 2\alpha+5 \end{pmatrix}$$

b) (3 Punkte) Unter Verwendung des Gauß-Algorithmus erhält man folgende reduzierte Matrixdarstellung der erweiterten Matrix

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha+2 & 0 & 0 & \alpha+2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & 1 \end{array}\right).$$

Für welche Werte von α besitzt das Gleichungssystem keine Lösung, eine eindeutige Lösung und unendliche viele Lösungen? Begründen Sie Ihre Ergebnisse ausführlich!

Wir können folgende Fälle unterscheiden

- $\alpha = -1$: $\text{Rang}(A) = 2, \text{Rang}(A|\boldsymbol{b}) = 3 \to \text{Rang}(A) \neq \text{Rang}(A|b)$
- $\alpha = -2$: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|\boldsymbol{b}) = 2$
- $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-2,-1\}$: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|\boldsymbol{b}) = 3$.

Für den Fall $\alpha = -1$ hat das Gleichungssystem keine Lösung, da $\text{Rang}(A) \neq \text{Rang}(A|b)$. Für $\alpha = -2$ ergibt sich eine eindimensionale Lösungsschar mit unendlich vielen Lösungen. Für alle anderen Fälle, also für $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-2,-1\}$, existiert eine eindeutige Lösung abhängig von α.

c) (2.5 Punkte) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem für alle lösbaren Fälle aus Unterpunkt b) in Abhängigkeit von α. Bestimmen Sie dafür die allgemeine Lösung für die unterschiedlichen Fälle und geben Sie für den Fall unendlich vieler Lösungen auch explizit den Kern(A) und dessen Dimension an!

- Fall: $\alpha = -2$
  Für diesen Fall gibt es unendlich viele Lösungen, also bestimmen wir die allgemeine Lösung, indem wir den Kern der Koeffizientenmatrix A und eine beliebige Partikulärlösung der Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ bestimmen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

  Aus diesem Gleichungssystem folgt $x_2 = 2$ und $x_3 = -1$. Allgemein gilt, dass der Kern(A) die Lösung des homogenen Gleichungssystems, also von A$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, ist. Weiters gilt, dass die Dimension des Kerns gleich der Anzahl der Unbekannten minus des Rangs von A ist, also dimKern$(A) = n$ - Rang(A).

  Wir wählen $x_1 = s$ und geben die allgemeine Lösung des Gleichungssystems an

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R},$$

$$\text{mit} \quad \text{Kern}(A) = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \text{dimKern}(A) = 1\,.$$

- Fall: $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-2,-1\}$
  Für diesen Fall gibt es eine eindeutige Lösung und das bereits umgeformte Gleichungssystem sieht wie folgt aus

  $$\begin{aligned}(\alpha+2)x_1 &= \alpha+2\,,\\ 2x_2 &= 4\,,\\ (\alpha+1)x_3 &= 1\,.\end{aligned}$$

  Da wir den Fall $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-2,-1\}$ behandeln, darf die erste Zeile durch $\alpha+2$ und die dritte Zeile durch $\alpha+1$ dividiert werden, was die folgende eindeutige Lösung des Gleichungssystems ergibt

  $$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-2,-1\}.$$