Institut für Analysis und Scientific Computing — TU Wien
A. Körner, E. Weinmüller — WS 2022

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

2. Test, Gruppe A (Di, 24.1.2023) *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt.* —

— *Unterlagen: eigene VO-Skripten und ein handgeschriebener A4-Zettel. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	2.	3.	gesamt
Punkte			maximal 18

- **Aufgabe 1.**

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Vorschrift

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

ein inneres Produkt auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ definiert.

Es gilt

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}^T \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}.$$

Die Lineariät im ersten Argument und die Symmetrie lassen sich mit wenigen Rechenschritten überprüfen. Die Definitheit gilt wegen

$$2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geq 0 \quad \text{und} \quad 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0},$$

da die Summe von Quadraten genau dann 0 ist, wenn jeder Summand 0 ist.

b) (4 Punkte) Der Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ sei mit dem inneren Produkt aus a) versehen. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis für den Unterraum

$$U = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir wenden das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren an.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_1 &= \boldsymbol{u}_1 \text{ mit } U = \mathcal{L}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}, \\ \boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{u}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{w}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1 \rangle} \boldsymbol{w}_1, \\ \boldsymbol{w}_3 &= \boldsymbol{u}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1 \rangle} \boldsymbol{w}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2 \rangle} \boldsymbol{w}_2. \end{aligned}$$

Wir berechnen nun $\boldsymbol{w}_2$:

$$\begin{aligned} &\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1 \rangle = 2 \cdot 1^2 + 0 + 1^2 + 0 = 3, \\ &\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{w}_1 \rangle = 3, \\ &\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \frac{3}{3} \boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun berechnen wir $\boldsymbol{w}_3$:

$$\langle \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2 \rangle = 1,$$
$$\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_1 \rangle = 1,$$
$$\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_2 \rangle = 0,$$
$$\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \frac{1}{3}\boldsymbol{w}_1 - \frac{0}{2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um die gewünschte Orthonormalbasis zu erhalten, müssen wir die Vektoren noch normieren. Dazu berechnen wir $\|\boldsymbol{w}_1\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1 \rangle} = \sqrt{3}$, $\|\boldsymbol{w}_2\| = 1$, $\|\boldsymbol{w}_3\| = \sqrt{5/3}$ und erhalten:

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{\boldsymbol{w}_1}{\|\boldsymbol{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{b}_2 = \frac{\boldsymbol{w}_2}{\|\boldsymbol{w}_2\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{b}_3 = \frac{\boldsymbol{w}_3}{\|\boldsymbol{w}_3\|} = \sqrt{\frac{3}{5}}\begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- **Aufgabe 2.** Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem der Form:

$$\begin{cases} -2x_1 - cx_2 + cx_3 & = b_1 \\ cx_1 - 3x_2 - 2x_3 & = b_2 \\ cx_1 + cx_3 & = b_3 \end{cases}$$

  mit dem Parameter $c \in \mathbb{R}$.

a) (2 Punkte) Schreiben Sie dieses Gleichungssystem als Matrixgleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ und $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$ um.

Argumentieren Sie mithilfe der Determinante, für welche $c \in \mathbb{R}$ die Matrix A regulär ist.

Das Gleichungssystem lässt sich schreiben als $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -c & c \\ c & -3 & -2 \\ c & 0 & c \end{pmatrix} \text{ und der Inhomogenität } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

$\det A(c) = c(c+2)(c+3) \Rightarrow$ Für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2, -3\}$ ist die Koeffizientenmatrix A regulär.

b) (2,5 Punkte) Betrachten Sie den Fall $c = -2$. Fassen Sie die Matrix A als lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ bezüglich der kanonischen Basis auf.

Gegeben sei eine weitere Basis $\boldsymbol{B}$ des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Berechnen Sie die Darstellung der linearen Abbildung $[\varphi(\boldsymbol{B})]_{\boldsymbol{B}}$ bezüglich der Basis $\boldsymbol{B}$.

Verwende folgende Formel zur Berechnung der linearen Abbildung φ bezüglich der Basis $\boldsymbol{B}$:

$$[\varphi(\boldsymbol{B})]_{\boldsymbol{B}} = T_{\boldsymbol{B}\leftarrow\boldsymbol{E}}[\varphi(\boldsymbol{E})]_{\boldsymbol{E}} T_{\boldsymbol{E}\leftarrow\boldsymbol{B}}.$$

Die Matrizen $[\varphi(\boldsymbol{E})]_{\boldsymbol{E}}$ und $T_{\boldsymbol{E}\leftarrow\boldsymbol{B}}$ berechnen sich zu:

$$[\varphi(\boldsymbol{E})]_{\boldsymbol{E}} = A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad T_{\boldsymbol{E}\leftarrow\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechne nun $T_{\boldsymbol{B}\leftarrow\boldsymbol{E}}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[z_2 - z_3]{z_1 - z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow T_{\boldsymbol{B}\leftarrow\boldsymbol{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [\varphi(\boldsymbol{B})]_{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

c) (1,5 Punkte) Gegeben sei der Vektor $\boldsymbol{v} = (1,0,1)^T$. Berechnen Sie $[A\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{E}}$ auf zwei verschiedene Arten:

(i) unter Verwendung von $[\varphi(\boldsymbol{E})]_{\boldsymbol{E}}$,

(ii) unter Verwendung von $[\varphi(\boldsymbol{B})]_{\boldsymbol{B}}$.

1. Art:

$$[A\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{E}} = [\varphi(\boldsymbol{E})]_{\boldsymbol{E}}[\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{E}} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

2. Art:

$$[A\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{E}} = T_{\boldsymbol{E}\leftarrow\boldsymbol{B}}[A\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{B}} = T_{\boldsymbol{E}\leftarrow\boldsymbol{B}}[\varphi(\boldsymbol{B})]_{\boldsymbol{B}}[\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{B}} = T_{\boldsymbol{E}\leftarrow\boldsymbol{B}}[\varphi(\boldsymbol{B})]_{\boldsymbol{B}}T_{\boldsymbol{B}\leftarrow\boldsymbol{E}}[\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{E}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

• **Aufgabe 3.** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) (1,5 Punkte) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und vereinfachen Sie so weit wie möglich. Mithilfe welcher Gleichung erhalten Sie nun die Eigenwerte der Matrix A? Geben Sie diese an, die Eigenwerte sind nicht zu berechnen.

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ -2 & 5 & 4-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{z_1 - z_2} \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1+\lambda & 0 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -2 & 5 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Mithilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes erhalten wir

$$\det(A - \lambda I) = p(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda(\lambda-4)+5) - (\lambda-1)((4-\lambda)-2) = -(\lambda-2)^2(\lambda-3).$$

Die Eigenwerte erfüllen die Gleichung

$$p(\lambda) = 0.$$

b) (3,5 Punkte) Die Eigenwerte der Matrix lauten $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Geben Sie ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an und berechnen Sie die Eigenvektoren und ggf. Hauptvektoren.

$\underline{\lambda_1 = 2:}\ n_1 = 2$

$$(A - \lambda_1 I) \cdot \boldsymbol{v}^{(1)} = \mathbf{0}: \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v}^{(1)} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$s := 1: \quad \boldsymbol{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wegen $n_1 = 2$ und $g_1 = 1$ müssen wir den dazugehörigen Hauptvektor bestimmen.

$$(A - \lambda_1 I) \cdot \boldsymbol{h}^{(1)} = \boldsymbol{v}^{(1)}: \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{h}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$s := 0: \quad \boldsymbol{h}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda_2 = 3:}\ n_2 = 1$

$$(A - \lambda_2 I) \cdot \boldsymbol{v}^{(2)} = \mathbf{0}: \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v}^{(2)} = s \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$s := 1: \quad \boldsymbol{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wegen $n_2 = g_2 = 1$ müssen wir keinen Hauptvektor bestimmen.

c) (1 Punkt) Geben Sie die Jordan'sche Normalform J und jene Transformationsmatrix X an, für die $AX = XJ$ gilt.

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Institut für Analysis und Scientific Computing
A. Körner, E. Weinmüller

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

2. Test, Gruppe B (Di, 24.1.2023) *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt.* —

— *Unterlagen: eigene VO-Skripten und ein handgeschriebener A4-Zettel. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

- **Aufgabe 1.** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) (1,5 Punkte) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und vereinfachen Sie es so weit wie möglich. Mithilfe welcher Gleichung erhalten Sie nun die Eigenwerte der Matrix A? Geben Sie diese an, die Eigenwerte sind nicht zu berechnen.

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Mithilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes erhalten wir

$$\det(A - \lambda I) = p(\lambda) = (1-\lambda)((5-\lambda)(3-\lambda)+2) + 1(-1(5-\lambda)+4) = (1-\lambda)(\lambda-4)^2.$$

Die Eigenwerte erfüllen die Gleichung

$$p(\lambda) = 0.$$

b) (3,5 Punkte) Die Eigenwerte der Matrix lauten $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$. Geben Sie ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an und berechnen Sie die Eigenvektoren und ggf. Hauptvektoren.

$\underline{\lambda_1 = 1:}\ n_1 = 1$

$$(A - \lambda_1 I) \cdot \boldsymbol{v^{(1)}} = \mathbf{0} : \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v^{(1)}} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$s := 1 : \quad \boldsymbol{v^{(1)}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wegen $n_1 = g_1 = 1$ müssen wir keinen Hauptvektor bestimmen.

$\underline{\lambda_2 = 4:}\ n_2 = 2$

$$(A - \lambda_2 I) \cdot \boldsymbol{v^{(2)}} = \mathbf{0} : \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v^{(2)}} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$s := 1 : \quad \boldsymbol{v^{(2)}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wegen $n_2 = 2$ und $g_2 = 1$ müssen wir den dazugehörigen Hauptvektor bestimmen.

$$(A - \lambda_2 I) \cdot \boldsymbol{h^{(2)}} = \boldsymbol{v^{(2)}} : \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{h^{(2)}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$s := 0 : \quad \boldsymbol{h^{(2)}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) (1 Punkt) Geben Sie die Jordan'sche Normalform J und jene Transformationsmatrix X an, für die $AX = XJ$ gilt.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

- **Aufgabe 2.** Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem der Form:

$$\begin{cases} -2x_1 + cx_2 + cx_3 & = b_1 \\ \; cx_1 + cx_3 & = b_2 \\ cx_1 - 3x_2 - 2x_3 & = b_3 \end{cases}$$

mit dem Parameter $c \in \mathbb{R}$.

a) (2 Punkte) Schreiben Sie dieses Gleichungssystem als Matrixgleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ und $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$ um.

Argumentieren Sie mithilfe der Determinante, für welche $c \in \mathbb{R}$ die Matrix A regulär ist.

Das Gleichungssystem lässt sich schreiben als $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & c & c \\ c & 0 & c \\ c & -3 & -2 \end{pmatrix} \text{ und der Inhomogenität } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

$\det A(c) = c(c+2)(c-3) \Rightarrow$ Für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2, 3\}$ ist die Koeffizientenmatrix A regulär.

b) (2,5 Punkte) Betrachten Sie den Fall $c = -2$. Fassen Sie die Matrix A als lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ bezüglich der kanonischen Basis auf.

Gegeben sei eine weitere Basis $\boldsymbol{B}$ des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Berechnen Sie die Darstellung der linearen Abbildung $[\varphi(\boldsymbol{B})]_{\boldsymbol{B}}$ bezüglich der Basis $\boldsymbol{B}$.

Verwende folgende Formel zur Berechnung der linearen Abbildung φ bezüglich der Basis $\boldsymbol{B}$:

$$[\varphi(\boldsymbol{B})]_{\boldsymbol{B}} = T_{\boldsymbol{B}\leftarrow\boldsymbol{E}}[\varphi(\boldsymbol{E})]_{\boldsymbol{E}} T_{\boldsymbol{E}\leftarrow\boldsymbol{B}}.$$

Die Matrizen $[\varphi(\boldsymbol{E})]_{\boldsymbol{E}}$ und $T_{\boldsymbol{E}\leftarrow\boldsymbol{B}}$ berechnen sich zu:

$$[\varphi(\boldsymbol{E})]_{\boldsymbol{E}} = A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad T_{\boldsymbol{E}\leftarrow\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechne nun $T_{\boldsymbol{B}\leftarrow\boldsymbol{E}}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{z_1 \leftrightarrow z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{z_3 - z_1}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{z_2 - z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow T_{\boldsymbol{B}\leftarrow\boldsymbol{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [\varphi(\boldsymbol{B})]_{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -5 \\ -4 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) (1,5 Punkte) Gegeben sei der Vektor $\boldsymbol{v} = (0, 1, 0)^T$. Berechnen Sie $[A\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{E}}$ auf zwei verschiedene Arten:

(i) unter Verwendung von $[\varphi(\boldsymbol{E})]_{\boldsymbol{E}}$,

(ii) unter Verwendung von $[\varphi(\boldsymbol{B})]_{\boldsymbol{B}}$.

1. Art:

$$[A\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{E}} = [\varphi(\boldsymbol{E})]_{\boldsymbol{E}}[\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{E}} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2. Art:

$$[A\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{E}} = T_{\boldsymbol{E}\leftarrow\boldsymbol{B}}[A\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{B}} = T_{\boldsymbol{E}\leftarrow\boldsymbol{B}}[\varphi(\boldsymbol{B})]_{\boldsymbol{B}}[\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{B}} = T_{\boldsymbol{E}\leftarrow\boldsymbol{B}}[\varphi(\boldsymbol{B})]_{\boldsymbol{B}}T_{\boldsymbol{B}\leftarrow\boldsymbol{E}}[\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{E}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -3 & -5 \\ -4 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

- **Aufgabe 3.**

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Vorschrift

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

ein inneres Produkt auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ definiert.

Es gilt

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}.$$

Die Lineariät im ersten Argument und die Symmetrie lassen sich mit wenigen Rechenschritten überprüfen. Die Definitheit gilt wegen

$$x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geq 0 \quad \text{und} \quad x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

da die Summe von Quadraten genau dann 0 ist, wenn jeder Summand 0 ist.

b) (4 Punkte) Der Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ sei mit dem inneren Produkt aus a) versehen. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis für den Unterraum

$$U = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir wenden das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren an.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_1 &= \boldsymbol{u}_1 \text{ mit } U = \mathcal{L}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}, \\ \boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{u}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{w}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1 \rangle} \boldsymbol{w}_1, \\ \boldsymbol{w}_3 &= \boldsymbol{u}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1 \rangle} \boldsymbol{w}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2 \rangle} \boldsymbol{w}_2. \end{aligned}$$

Wir berechnen nun $\boldsymbol{w}_2$:

$$\begin{aligned} &\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1 \rangle = 0 + 2 \cdot 1^2 + 0 + 0 = 2, \\ &\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{w}_1 \rangle = 2, \\ &\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \frac{2}{2} \boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun berechnen wir $\boldsymbol{w}_3$:

$$\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2 \rangle = 2, \\
&\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_1 \rangle = 0, \\
&\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_2 \rangle = 1, \\
&\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \frac{0}{2}\boldsymbol{w}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Um die gewünschte Orthonormalbasis zu erhalten, müssen wir die Vektoren noch normieren. Dazu berechnen wir $\|\boldsymbol{w}_1\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1 \rangle} = \sqrt{2}$, $\|\boldsymbol{w}_2\| = \sqrt{2}$, $\|\boldsymbol{w}_3\| = \sqrt{3/2}$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_1 &= \frac{\boldsymbol{w}_1}{\|\boldsymbol{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{b}_2 &= \frac{\boldsymbol{w}_2}{\|\boldsymbol{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{b}_3 &= \frac{\boldsymbol{w}_3}{\|\boldsymbol{w}_3\|} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Institut für Analysis und Scientific Computing
A. Körner, E. Weinmüller

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

2. Test, Gruppe C (Di, 24.1.2023) *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt.* —

— *Unterlagen: eigene VO-Skripten und ein handgeschriebener A4-Zettel. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	2.	3.	gesamt
Punkte			maximal 18

- **Aufgabe 1.**

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Vorschrift

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_4y_4$$

ein inneres Produkt auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ definiert.

Es gilt

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}.$$

Die Lineariät im ersten Argument und die Symmetrie lassen sich mit wenigen Rechenschritten überprüfen. Die Definitheit gilt wegen

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 \geq 0 \quad \text{und} \quad x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

da die Summe von Quadraten genau dann 0 ist, wenn jeder Summand 0 ist.

b) (4 Punkte) Der Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ sei mit dem inneren Produkt aus a) versehen. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis für den Unterraum

$$U = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir wenden das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren an.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_1 &= \boldsymbol{u}_1 \text{ mit } U = \mathcal{L}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}, \\ \boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{u}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{w}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1 \rangle} \boldsymbol{w}_1, \\ \boldsymbol{w}_3 &= \boldsymbol{u}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1 \rangle} \boldsymbol{w}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2 \rangle} \boldsymbol{w}_2. \end{aligned}$$

Wir berechnen nun $\boldsymbol{w}_2$:

$$\begin{aligned} &\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1 \rangle = 1^2 + 0 + 2 \cdot 1^2 + 1^2 = 4, \\ &\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{w}_1 \rangle = 4, \\ &\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \frac{4}{4} \boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun berechnen wir $\boldsymbol{w}_3$:

$$\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2 \rangle = 1, \\
&\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_1 \rangle = 3, \\
&\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_2 \rangle = 0, \\
&\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \frac{3}{4}\boldsymbol{w}_1 - \frac{0}{1}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 1/4 \\ -3/4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Um die gewünschte Orthonormalbasis zu erhalten, müssen wir die Vektoren noch normieren. Dazu berechnen wir $\|\boldsymbol{w}_1\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1 \rangle} = 2$, $\|\boldsymbol{w}_2\| = 1$, $\|\boldsymbol{w}_3\| = \sqrt{3/4}$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_1 &= \frac{\boldsymbol{w}_1}{\|\boldsymbol{w}_1\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{b}_2 &= \frac{\boldsymbol{w}_2}{\|\boldsymbol{w}_2\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{b}_3 &= \frac{\boldsymbol{w}_3}{\|\boldsymbol{w}_3\|} = \sqrt{\frac{4}{3}}\begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 1/4 \\ -3/4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

- **Aufgabe 2.** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) (1,5 Punkte) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und vereinfachen Sie so weit wie möglich. Mithilfe welcher Gleichung erhalten Sie nun die Eigenwerte der Matrix A? Geben Sie diese an, die Eigenwerte sind nicht zu berechnen.

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 5 & 4-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{z_3+z_1} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 5 & 4-\lambda & 2 \\ -1-\lambda & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Mithilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes kommt man auf

$$\det(A - \lambda I) = p(\lambda) = -(\lambda+1)(2+4-\lambda) + (2-\lambda)(-\lambda(4-\lambda)-5) = -(\lambda+1)(\lambda-4)^2.$$

Die Eigenwerte erfüllen die Gleichung

$$p(\lambda) = 0.$$

b) (3,5 Punkte) Die Eigenwerte der Matrix lauten $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$. Geben Sie ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an und berechnen Sie die Eigenvektoren und ggf. Hauptvektoren.

$\underline{\lambda_1 = -1:}\ n_1 = 1$

$$(A - \lambda_1 I) \cdot \boldsymbol{v^{(1)}} = \mathbf{0}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v^{(1)}} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$s := 1: \quad \boldsymbol{v^{(1)}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wegen $n_1 = g_1 = 1$ müssen wir keinen Hauptvektor bestimmen.

$\underline{\lambda_2 = 4:}\ n_2 = 2$

$$(A - \lambda_2 I) \cdot \boldsymbol{v^{(2)}} = \mathbf{0}: \quad \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v^{(2)}} = s \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$s := 1: \quad \boldsymbol{v^{(2)}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Wegen $n_2 = 2$ und $g_2 = 1$ müssen wir den dazugehörigen Hauptvektor bestimmen.

$$(A - \lambda_2 I) \cdot \boldsymbol{h^{(2)}} = \boldsymbol{v^{(2)}}: \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{h^{(2)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$s := 1: \quad \boldsymbol{h^{(2)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

c) (1 Punkte) Geben Sie die Jordan'sche Normalform J und jene Transformationsmatrix X an, für die $AX = XJ$ gilt.

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

- **Aufgabe 3.** Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem der Form:

$$\begin{cases} cx_1 + cx_3 & = b_1 \\ -3x_1 + cx_2 + cx_3 & = b_2 \\ cx_1 - 2x_2 - 3x_3 & = b_3 \end{cases}$$

mit dem Parameter $c \in \mathbb{R}$.

a) (2 Punkte) Schreiben Sie dieses Gleichungssystem als Matrixgleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ und $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$ um. Argumentieren Sie mithilfe der Determinante, für welche $c \in \mathbb{R}$ die Matrix A regulär ist.

Das Gleichungssystem lässt sich schreiben als $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} c & 0 & c \\ -3 & c & c \\ c & -2 & -3 \end{pmatrix} \text{ und der Inhomogenität } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

$\det A(c) = -c(c-2)(c+3) \Rightarrow$ Für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2, -3\}$ ist die Koeffizientenmatrix A regulär.

b) (2,5 Punkte) Betrachten Sie den Fall $c = 2$. Fassen Sie die Matrix A als lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich der kanonischen Basis auf.

Gegeben sei eine weitere Basis $\boldsymbol{B}$ des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Berechnen Sie die Darstellung der linearen Abbildung $[\varphi(\boldsymbol{B})]_{\boldsymbol{B}}$ bezüglich der Basis $\boldsymbol{B}$.

Verwende folgende Formel zur Berechnung der linearen Abbildung φ bezüglich der Basis $\boldsymbol{B}$:

$$[\varphi(\boldsymbol{B})]_{\boldsymbol{B}} = T_{\boldsymbol{B}\leftarrow\boldsymbol{E}}[\varphi(\boldsymbol{E})]_{\boldsymbol{E}} T_{\boldsymbol{E}\leftarrow\boldsymbol{B}}.$$

Die Matrizen $[\varphi(\boldsymbol{E})]_{\boldsymbol{E}}$ und $T_{\boldsymbol{E}\leftarrow\boldsymbol{B}}$ sind leicht zu erkennen:

$$[\varphi(\boldsymbol{E})]_{\boldsymbol{E}} = A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad T_{\boldsymbol{E}\leftarrow\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechne nun $T_{\boldsymbol{B}\leftarrow\boldsymbol{E}}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[z_2 - z_3]{z_1 - z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow T_{\boldsymbol{B}\leftarrow\boldsymbol{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [\varphi(\boldsymbol{B})]_{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -5 & 4 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

c) (1.5 Punkte) Gegeben sei der Vektor $\boldsymbol{v} = (1, 1, 0)^T$. Berechnen Sie $[A\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{E}}$ auf zwei verschiedene Arten:

(i) unter Verwendung von $[\varphi(\boldsymbol{E})]_{\boldsymbol{E}}$,

(ii) unter Verwendung von $[\varphi(\boldsymbol{B})]_{\boldsymbol{B}}$.

1. Art:

$$[A\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{E}} = [\varphi(\boldsymbol{E})]_{\boldsymbol{E}}[\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Art:

$$[A\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{E}} = T_{\boldsymbol{E}\leftarrow\boldsymbol{B}}[A\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{B}} = T_{\boldsymbol{E}\leftarrow\boldsymbol{B}}[\varphi(\boldsymbol{B})]_{\boldsymbol{B}}[\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{B}} = T_{\boldsymbol{E}\leftarrow\boldsymbol{B}}[\varphi(\boldsymbol{B})]_{\boldsymbol{B}}T_{\boldsymbol{B}\leftarrow\boldsymbol{E}}[\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{E}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -5 & 4 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$