1. Betrachten Sie $\mathbb{R}^3$, die Menge aller räumlichen Spaltenvektoren. Weisen Sie nach, dass diese Menge, ausgestattet mit dem Kreuzprodukt, kein Monoid darstellt. Gibt es für das Kreuzprodukt ein Element $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^3$, welches die Rolle eines neutralen Elements einnimmt? Begründen Sie Ihre Antwort.

   Lösung. Sei $(M, \diamond)$ eine Halbgruppe. Existiert ein Element $e \in M$, welches für alle $a \in M$

   $$e \diamond a = a \diamond e = a$$

   erfüllt, so heißt $(M, \diamond)$ ein Monoid.

   Wir müssen also nachweisen, dass kein neutrales Element bezüglich dem Kreuzprodukt existiert.
   Sei $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)^T \in \mathbb{R}^3$ gegeben, dann müsste für ein Monoid ein Element $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)^T \in \mathbb{R}^3$ existieren, sodass

   $$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{e} \overset{(*)}{=} \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}. \tag{1}$$

   $(*)$ führt bereits zu einem Widerspruch, da das Kreuzprodukt keine kommutative Operation ist, da für alle $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt

   $$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}.$$

   Weiters gilt

   $$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 e_3 - v_3 e_2 \\ v_3 e_1 - v_1 e_3 \\ v_1 e_2 - v_2 e_1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

   $$= \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

   Mit Hilfsmitteln, die zu einem späteren Zeitpunkt in der Vorlesung besprochen werden, lässt sich die Determinante der Matrix

   $$\det \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

   berechnen. Aufgrund dieser Tatsache wird die Schlussfolgerung gezogen, dass das lineare Gleichungssystem in (3) keine eindeutige Lösung besitzt und somit kein neutrales Element $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^3$ bezüglich des Kreuzprodukts existiert.

2. Geben Sie die Verknüpfungstabelle für die Addition $\oplus$ und die Multiplikation $\odot$ modulo 5 in $\mathbb{Z}_5$ an. Begründen Sie, dass $\mathbb{Z}_5$ mit den so definierten Verknüpfungen einen Körper bildet.

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Die folgenden Eigenschaften müssen erfüllt sein, sodass $\mathbb{Z}_5$ ein Körper ist.

(a) $(\mathbb{Z}_5, \oplus)$ bildet eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 0.

(b) $(\mathbb{Z}_5 \backslash \{0\}, \odot)$ bildet eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 1

(c) Distributivgesetz $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot b$

Für die Modulo-Operation gelten die folgenden Rechenregeln.

(1) $(a+b) \bmod m = \big((a \bmod m) + (b \bmod m)\big) \bmod m$

(2) $(a+b) \bmod m = \big(a + (b \bmod m)\big) \bmod m$

(3) $(a \bmod m) \bmod m = a \bmod m$

(4) $(a \cdot b) \bmod m = \big((a \bmod m) \cdot (b \bmod m)\big) \bmod m$

Lösung.
(a) $(\mathbb{Z}_5, \oplus)$

- Assoziativität:

$$
\begin{aligned}
(a \oplus b) \oplus c = ((a+b) \bmod 5) \oplus c &= ((a+b) \bmod 5 + c) \bmod 5 \\
&\stackrel{(2)}{=} ((a+b)+c) \bmod 5 \\
&= (a+(b+c)) \bmod 5 \\
&\stackrel{(2)}{=} (a+(b+c) \bmod 5) \bmod 5 \\
&= (a+(b \oplus c)) \bmod 5 \\
&= (a \oplus (b \oplus c))
\end{aligned}
$$

- neutrales Element: Wie aus der Verknüpfungstabelle der Operation $\oplus$ hervorgeht, exisitiert für jedes Element aus $\mathbb{Z}_5$ ein neutrales Element, nämlich 0, sodass

$$\forall a \in \mathbb{Z}_5, \exists e = 0 \in \mathbb{Z}_5 \colon a \oplus e = a \oplus 0 = a$$

- inverses Element: Geht ebenfalls aus der Verknüpfungstabelle der Operation $\oplus$ hervor.

$$\forall a \in \mathbb{Z}_5 \colon a^{-1} \in \mathbb{Z}_5 \colon a \oplus a^{-1} = e = 0$$

- Kommutativität: $a \oplus b = (a+b) \bmod 5 = (b+a) \bmod 5 = b \oplus a$

Lösung.
(b) $(\mathbb{Z}_5\backslash\{0\}, \odot)$

- Assoziativität:

$$\begin{aligned}
a \odot (b \odot c) &= a \odot ((b \cdot c) \bmod 5) = \big(a \cdot ((b \cdot c) \bmod 5)\big) \bmod 5 \\
&\overset{(3)+(4)}{=} \big(a \bmod 5 \cdot (b \cdot c) \bmod 5\big) \bmod 5 \\
&= (a + (b + c)) \bmod 5 \\
&\overset{(4)}{=} ((a \cdot (b \cdot c)) \bmod 5) \bmod 5 \\
&\overset{(3)}{=} (a \cdot (b \cdot c)) \bmod 5 \\
&= ((a \cdot b) \cdot c) \bmod 5 \\
&\overset{(4)}{=} ((a \cdot b) \bmod 5 \cdot c \bmod 5) \bmod 5 \\
&\overset{(3)+(4)}{=} ((a \cdot b) \bmod 5 \cdot c) \bmod 5 \\
&= ((a \odot b) \cdot c) \bmod 5 \\
&= (a \odot b) \odot c
\end{aligned}$$

- neutrales Element: Wie aus der Verknüpfungstabelle der Operation $\odot$ hervorgeht, exisitiert für jedes Element aus $\mathbb{Z}_5$ ein neutrales Element, nämlich 1, sodass

$$\forall a \in \mathbb{Z}_5, \exists n = 1 \in \mathbb{Z}_5 \colon a \odot n = a \odot 1 = a$$

- inverses Element: Geht ebenfalls aus der Verknüpfungstabelle der Operation $\odot$ hervor.

$$\forall a \in \mathbb{Z}_5 \colon a^{-1} \in \mathbb{Z}_5 \colon a \odot a^{-1} = n = 1$$

- Kommutativität: $a \odot b = (a \cdot b) \bmod 5 = (b \cdot a) \bmod 5 = b \odot a$

(c) Distributivität: $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot b$

$$\begin{aligned}
a \odot (b \oplus c) &= a \odot (b + c) \bmod 5 = (a \cdot (b + c) \bmod 5) \bmod 5 \\
&\overset{(4)}{=} \big(a \bmod 5 \cdot (b + c) \bmod 5\big) \bmod 5 \\
&\overset{(3)+(4)}{=} (a \cdot (b + c)) \bmod 5 \\
&= (a \cdot b + a \cdot c) \bmod 5 \\
&\overset{(4)}{=} \big((a \cdot b) \bmod 5 + (a \cdot c) \bmod 5\big) \bmod 5 \\
&= \big((a \odot b) + (a \odot c)\big) \bmod 5 \\
&= (a \odot b) \oplus (a \odot c)
\end{aligned}$$

3. Zeigen Sie, dass jede komplexe Zahl $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ein multiplikatives inverses Element besitzt, von der Form

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Lösung.
Version 1: Simples Nachrechnen, dass die gegebene Form wirklich das multiplikative inverse Element darstellt.

$$\begin{aligned} zz^{-1} &= (a+\mathrm{i}b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \frac{a^2}{a^2+b^2} - \mathrm{i}\frac{ab}{a^2+b^2} + \mathrm{i}\frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} \\ &= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1 \end{aligned}$$

Version 2: Herleitung der gegebenen Darstellung. Diese Darstellung existiert, da $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben sind und somit $\frac{a}{a^2+b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a^2+b^2}$ dargestellt werden kann.

$$\begin{aligned} zz^{-1} &= (a+\mathrm{i}b)\cdot(a+\mathrm{i}b)^{-1} = (a+\mathrm{i}b)\cdot\frac{1}{a+\mathrm{i}b}\cdot\frac{a-\mathrm{i}b}{a-\mathrm{i}b} = (a+\mathrm{i}b)\cdot\frac{a-\mathrm{i}b}{a^2-\mathrm{i}ab+\mathrm{i}ab+b^2} \\ &= (a+\mathrm{i}b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a^2+b^2}\right) \end{aligned}$$

4. Zeigen Sie, dass der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ als direkte Summe der Unterräume U, V darstellbar ist.

$$U = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}, \quad V = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 1.9

5. Sind die Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ linear ab- oder unabhängig im Vektorraum $\mathbb{R}^3$?

   (a) $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,0)^T, \boldsymbol{v}_2 = (1,2,0)^T, \boldsymbol{v}_3 = (1,2,3)^T$

   (b) $\boldsymbol{v}_1 = (0,0,2)^T, \boldsymbol{v}_2 = (1,2,1)^T, \boldsymbol{v}_3 = (1,2,3)^T$

Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 1.10 (b), (c)

6. Sei $V = \mathbb{R}^3$. Untersuchen Sie, ob die Menge W ein Unterraum vom Vektorraum V ist. Wenn ja, berechnen Sie die Dimension und eine Basis von W.

   (a) $W = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \colon 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

   (b) $W = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \colon 2x_1 + x_2 + x_3 = 4\}$

Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 1.15

7. Seien U, V Unterräume von $\mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$\begin{aligned} U &= \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \colon x_2 + x_3 + x_4 = 0\}, \\ W &= \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_2 = 0,\ x_3 - 2x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

   (a) Bestimmen Sie jeweils die Dimension und eine Basis von $U, W, U \cap W, U + W$

   (b) Überprüfen Sie anhand dieses Beispiels die Aussage

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 1.17