1. Sei $P_2$ der Polynomraum aller Polynome vom Grad kleiner gleich 2, gegeben durch

$$P_2 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \colon a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Betrachten Sie die Basis $B_1 = \{p_1, p_2, p_3\} = \{x^2 + 2x,\ x - 2, x^2 - 2\}$ und die sogenannte Monombasis $B_2 = \{b_1, b_2, b_3\} = \{1, x, x^2\}$.

(a) Zeigen Sie, dass sowohl $B_1$ als auch $B_2$ eine Basis von $P_2$ bilden.

(b) Bestimmen Sie die Dimension von $P_2$.

(c) Berechnen Sie für $q(x) = 3\,x^2 + 5\,x - 10$ die Koordinatenvektoren $[q]_{B_1}$ und $[q]_{B_2}$.

**Lösung.**

(a) Eine Basis ist ein sogenanntes linear unabhängiges Erzeugendensystem, es können somit alle Elemente eines Vektorraum mithilfe der linear unabhängigen Basiselemente dargestellt werden.

– Lineare Unabhängigkeit von $B_1$:

$$s_1(x^2 + 2x) + s_2(x - 2) + s_3(x^2 - 2) = 0 \quad \overset{!}{\Rightarrow} \quad s_1 = s_2 = s_3 = 0$$
$$s_1\,x^2 + s_3\,x^2 + 2\,s_1\,x + s_2\,x - 2\,s_2 - 2\,s_3 = 0$$

$$\Rightarrow s_1\,x^2 + s_3\,x^2 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad s_1 + s_3 = 0$$
$$\Rightarrow 2\,s_1\,x + s_2\,x \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 2\,s_1 + s_2 = 0$$
$$\Rightarrow -2\,s_2 - 2\,s_3 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad s_3 = -s_2$$

Somit erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} I:&\quad s_3 = -s_1,\\ II:&\quad s_2 = -2s_1,\\ III:&\quad s_3 = -s_2 \end{aligned}$$

Aus $I + III \Rightarrow s_1 = s_2$. Gleichung $II$ ist somit allerdings nur genau dann auch erfüllt, wenn $s_1 = s_2 = 0$, womit folgt, dass

$$s_1 = s_2 = s_3 = 0$$

– Weiters kann mithilfe der Polynome $\{p_1,\ p_2,\ p_3\}$ jedes beliebige Polynom $p \in P$ durch Linearkombination gebildet werden, weswegen $B_1$ eine Basis bildet.

– Lineare Unabhängigkeit von $B_2$:

$$s_1\,x^2 + s_2\,x + s_3 \cdot 1 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow s_1 = s_2 = s_3 = 0$$

– Weiters kann mithilfe der Polynome $\{1,\ x,\ x^2\}$ jedes beliebige Polynom $p \in P$ durch Linearkombination gebildet werden, weswegen $B_2$ eine Basis bildet.

(b) $\dim P_2 = 3$

(c) Koordinatisierung bezüglich $B_1$:

$$s_1(x^2+2x) + s_2(x-2) + s_3(x^2-2) = 3\,x^2 + 5\,x - 10$$
$$(s_1+s_3)x^2 + (2\,s_1+s_2)x - 2\,s_2 - 2\,s_3 = 3\,x^2 + 5\,x - 10$$

$$\Rightarrow I: \quad s_1 + s_3 \overset{!}{=} 3 \quad \Rightarrow \quad s_3 = 3 - s_1$$
$$\Rightarrow II: \quad 2\,s_1 + s_2 \overset{!}{=} 5 \quad \Rightarrow \quad s_1 = \frac{5}{2} - \frac{s_2}{2}$$
$$\Rightarrow III: \quad -2\,s_2 - 2\,s_3 \overset{!}{=} -10 \quad \Rightarrow \quad s_2 + s_3 = 5$$

$I + II$ ergibt

$$\begin{aligned} III: \quad s_2 + s_3 &= \\ s_2 + 3 - s_1 &= \\ s_2 + 3 - \frac{5}{2} + \frac{s_2}{2} &= 5 \quad | \cdot 2 \\ \Rightarrow 2\,s_2 + 6 - 5 + s_2 &= 10 \\ 3\,s_2 = 9 \quad \Rightarrow \quad s_2 &= 3 \end{aligned}$$

Die weiteren Lösungen ergeben sich zu $s_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$ und $s_3 = 3 - s_1 = 2$.

Die Koordinatisierung bezüglich der Basis $B_1$ lautet $[q]_{B_1} = (1,3,2)^T$ und jene bezüglich der Monombasis $B_2$ lässt sich ablesen zu $[q]_{B_2} = (-10,5,3)^T$.

2. Gegeben seien zwei Basen $E_2$ und $B$ des Vektorraums $\mathbb{R}^2$ definiert durch

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\},$$

wobei $E_2$ die sogenannte kanonische Basis ist.

(a) Zeigen Sie, dass sowohl $E_2$ als auch $B$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden.

(b) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathbb{R}^2$.

(c) Berechnen Sie für $[\boldsymbol{v}]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ den Koordinatenvektor $[\boldsymbol{v}]_{E_2}$ und den Vektor $\boldsymbol{v}$.

**Lösung.**

(a) Eine Basis ist ein sogenanntes linear unabhängiges Erzeugendensystem, es können somit alle Elemente eines Vektorraum mithilfe der linear unabhängigen Basiselemente dargestellt werden.

- Lineare Unabhängigkeit von $E_2$:

$$s_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad s_1 = s_2 = 0$$

- Mithilfe der Vektoren aus $E_2$ können alle Elemente aus $\mathbb{R}^2$ mittels Linearkombination dargestellt werden.
- Lineare Unabhängigkeit von $B$:

$$s_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad I: \; s_1 - 2\,s_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad s_1 = 2\,s_2 \\ &\Rightarrow \quad II: \; 2\,s_1 + 3\,s_2 = 0 \quad \overset{I}{\Rightarrow} \quad 4\,s_2 + 3\,s_2 = 7\,s_2 \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

  Somit erhalten wir $s_1 = s_2 = 0$.

- Mithilfe der Vektoren aus $B$ können alle Elemente aus $\mathbb{R}^2$ mittels Linearkombination dargestellt werden.

(b) $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

(c) Wir berechnen zunächsten den Vektor $\boldsymbol{v}$.

$$\boldsymbol{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen wir nun den Koordinatenvektor $[\boldsymbol{v}]_{E_2}$.

$$s_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow s_1 = 5, \quad s_2 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad [\boldsymbol{v}]_{E_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\boldsymbol{v}$ und der Koordinatenvektor $[\boldsymbol{v}]_{E_2}$ stimmen also überein.

3. Gegeben seien zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ definiert durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A + B$, $3B$, $-2B$, $A + 2B$, $B - A$, $A^T, B^T$.

**Lösung.** Siehe Übungsskriptum, Beispiel 2.2

4. Sei $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der Vektorraum aller $2 \times 2$-Matrizen über $\mathbb{R}$.

   (a) Zeigen Sie, dass $B$ gegeben durch

   $$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

   eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ darstellt.

   (b) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor $[A]_B$ für $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

   (c) Bestimmen Sie die Dimension von $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ und im allgemeinen Fall $V = \mathbb{R}^{m\times n}$.

**Lösung.** Siehe Übungsskriptum, Beispiel 2.4

5. Gegeben seien die Matrizen $A, B, C$ definiert durch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A \cdot B$ und $B \cdot C$.

**Lösung.** Siehe Übungsskriptum, Beispiel 2.5

6. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, x \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.
Bestimmen Sie Rang $A$ und Rang$(A|\boldsymbol{b})$. Beurteilen Sie anhand Ihrer Ergebnisse, ob das lineare Gleichungssystem lösbar ist.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Lösung.** Siehe Übungsskriptum, Beispiel 2.7 (b), (c)

7. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie Rang $A$ und Rang$(A|\boldsymbol{b})$. Welche Bedingung an $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ muss erfüllt sein, sodass das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lösbar ist?

(b) Bestimmen Sie Rang $A$ und Rang$(A|\boldsymbol{b})$ für die folgenden Werte. Beurteilen Sie anhand Ihrer Ergebnisse, ob das lineare Gleichungssystem lösbar ist.

| a | b | c | d |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| -1 | 2 | -3 | 4 |

**Lösung.** Siehe Übungsskriptum, Beispiel 2.8