1. Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mittels des Gauß-Algorithmus. Bestimmen Sie außerdem den Rang der Koeffizientenmatrix A.

   (a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   (c)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 2.7

2. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

   zunächst für nicht näher bestimmte Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Lösen Sie das Gleichungssystem für folgende Werte.

a	b	c	d
0	0	0	0
1	2	3	4
-1	2	-3	4

   Führen Sie weiters eine rationelle Methode durch, in der Sie die drei Gleichungssystem gleichzeit auf gestaffelte Form bringen.
   Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 2.8

3. Bestimmen Sie $s \in \mathbb{R}$ so, dass das System in den Unbekannten x, y, z eine eindeutige Lösung, keine Lösung und mehr als eine Lösung besitzt.

   (a)
$$\begin{aligned} s\,x + y + z &= 1, \\ x + s\,y + z &= 1, \\ x + y + s\,z &= 1. \end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned} x + 2\,y + s\,z &= 1, \\ 2\,x + s\,y + 8\,z &= 3. \end{aligned}$$

   Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 2.9

4. Bestimmen Sie für die gegebenen Gleichungssysteme

   (i) die Matrix A,
   (ii) den Rang der Matrix A sowie den Rang der erweiterten Matrix,
   (iii) den Kern der Matrix A,
   (iv) und die allgemeine Lösung.

   (a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_3 &= 1 \\ 3\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 &= 0 \\ 4\,x_1 + x_2 + 3\,x_3 &= 0 \end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 2\,x_1 + 5\,x_2 - 7\,x_3 - 5\,x_4 &= -2 \\ 2\,x_1 - x_2 + x_3 + 3\,x_4 &= 4 \\ 5\,x_1 + 2\,x_2 - 4\,x_3 + 2\,x_4 &= 6 \end{aligned}$$

   (c)
$$\begin{aligned} 2\,x_2 - x_3 &= -1 \\ 2\,x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

   (d)
$$2\,x_1 - x_2 + 3\,x_3 = 7$$

   (e)
$$\begin{aligned} x_2 + x_5 &= 2 \\ x_4 + x_5 &= -1 \\ x_2 + x_6 &= 1 \end{aligned}$$

Lösung. Siehe Übungskriptum, Beispiel 2.10

5. Betrachten Sie $U_1 = \mathcal{L}\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$ und $U_2 = \mathcal{L}\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3\}$, wobei die Vektoren $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i \in \mathbb{R}^4$, $i = 1 \dots 3$ gegeben sind durch

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Seien weiteres $U_1 = \mathcal{L}\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$ und $U_2 = \mathcal{L}\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3\}$. Bestimmen Sie jeweils die Dimension und eine Basis von U_1, $U_2\, U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$.
Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 2.11

6. Betrachten Sie die Vektoren $\boldsymbol{b}_i \in \mathbb{R}, i = 1 \dots 5$ gegeben durch

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4, \boldsymbol{b}_5\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^5$ bildet.

(b) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor $[\boldsymbol{a}]_B$ des Vektors $\boldsymbol{a} = (0, 0, 0, 0, 3)^T$ bezüglich der Basis B.

(c) Ergänzen Sie die linear unabhängigen Vektoren

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -6 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

durch Vektoren der Basis B zu einer weiteren Basis B'.

Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 2.12

7. Gegeben sei eine Matrix A und eine Inhomogenität $\boldsymbol{b}$. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Bestimmen Sie die Inverse der Matrix A und verwenden Sie die Inverse, um das Gleichungssystem zu lösen.

(a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -9 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 2.17