1. Betrachten Sie die Vektorräume $V = \mathbb{R}^3$ und $W = \mathbb{R}^2$ mit den jeweiligen Basen

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{und} \qquad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Weiters sei eine lineare Abbildung definiert durch

$$\varphi\colon V \to W, \qquad [\varphi(B)]_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für $\boldsymbol{a} = (0,5,6)^T$ den Vektor $\varphi(\boldsymbol{a}) \in W$.
Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 3.14

2. Die beiden Vektoren

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis des Vektorraums $V = \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die zugehörige duale Basis von V^*.

Lösung. Sei $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ eine Basis des Vektorraums V, so ist $B^* = \{b^1, b^2\}$ eine Basis von V^*, definiert durch

$$b^j(\boldsymbol{b}_i) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j, \\ 0, & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Die gesuchten Basisvektoren b^1, b^2 werden angesetzt als

$$b^1 = (b^1_1, b^1_2) \qquad \text{und} \qquad b^2 = (b^2_1, b^2_2).$$

Aufgrund der Definition ergeben sich die Beziehungen

$$(b^1_1, b^1_2)\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 1, \quad (b^1_1, b^1_2)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0, \qquad (b^2_1, b^2_2)\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0, \quad (b^2_1, b^2_2)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1.$$

Ausmultipliziert ergeben sich zwei Gleichungssysteme, einmal für b^1 und b^2.

$$\begin{aligned} 4b^1_1 + 3b^1_2 &= 1 \qquad & 4b^2_1 + 3b^2_2 &= 0 \\ 3b^1_1 + 2b^1_2 &= 0 \qquad & 3b^2_1 + 2b^2_2 &= 1 \end{aligned}$$

Die Lösungen der linearen Gleichungssysteme lauten

$$b^1_1 = -2,\ b^1_2 = 3, \qquad b^2_1 = 3,\ b^2_2 = -4,$$

somit ergeben sich die dualen Basisvektoren zu

$$b^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

3. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und eine Basis $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ gegeben durch

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die duale Basis $B^* = \{b^1, b^2, b^3\}$ des Dualraums V^*.

Lösung. Die gesuchten Basisvektoren b^1, b^2, b^3 werden angesetzt als

$$b^1 = (b^1_1, b^1_2, b^1_3), \qquad b^2 = (b^2_1, b^2_2, b^2_3), \qquad b^3 = (b^3_1, b^3_2, b^3_3).$$

Aufgrund der Definition ergeben sich die Beziehungen

$$(b^1_1, b^1_2, b^1_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1, \quad (b^1_1, b^1_2, b^1_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0, \qquad (b^1_1, b^1_2, b^1_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$(b^2_1, b^2_2, b^2_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (b^2_1, b^2_2, b^2_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1, \qquad (b^2_1, b^2_2, b^2_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$(b^3_1, b^3_2, b^3_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (b^3_1, b^3_2, b^3_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0, \qquad (b^3_1, b^3_2, b^3_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Ausmultipliziert ergeben sich Gleichungssysteme für b^1, b^2 und b^3.

$$\begin{aligned} b^1_1 + b^1_2 + b^1_3 &= 1 \\ b^1_1 - b^1_3 &= 0 \\ b^1_2 + b^1_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b^2_1 + b^2_2 + b^2_3 &= 0 \\ b^2_1 - b^2_3 &= 1 \\ b^2_2 + b^2_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b^3_1 + b^3_2 + b^3_3 &= 0 \\ b^3_1 - b^3_3 &= 0 \\ b^3_2 + b^3_3 &= 1 \end{aligned}$$

Die Lösungen der linearen Gleichungssysteme lauten

$b^1_1 = 1,\ b^1_2 = -1,\ b^1_3 = 1, \qquad b^2_1 = 0,\ b^2_2 = 1,\ b^2_3 = -1, \qquad b^3_1 = -1,\ b^3_2 = 2,\ b^3_3 = -1,$

somit ergeben sich die dualen Basisvektoren zu

$$b^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad b^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4. Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ definiert durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det A$.
Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 4.6

5. Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ definiert durch

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a & 3 & 2-a \\ a+2 & 2 & 8 & a \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -a & -1 & a-5 & 1-a \end{pmatrix}$$

mit einem Parameter $a \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie den Parameter $a \in \mathbb{R}$ so, dass gilt $\det A = 0$.
Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 4.2

6. Betrachten Sie die beiden Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie, ob die beiden Matrizen ähnlich sind. Überprüfen Sie zunächst, ob $\det A = \det B$ gilt. Bestimmen Sie anschließend die Matrix $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, sodass gilt $TAT^{-1} = B$ als Lösung der Matrizengleichung $TA = BT$.
Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 4.3

7. Sei $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} cx_1 - x_2 &= b_1 \\ -x_1 + cx_2 - x_3 &= b_2 \\ -x_2 + cx_3 &= b_3 \end{aligned}$$

mit der Inhomogenität $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$. Welche Aussagen können Sie anhand der Determinante der Koeffizientenmatrix über die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit des Parameters $c \in \mathbb{R}$ treffen? Betrachten Sie hierfür die beiden Fälle

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 4.10