1. Untersuchen Sie die Definitheit der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 8 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 9 & -4 \\ 1 & -3 & 2 & -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 5.35

2. Stellen Sie fest, ob die folgenden Matrizen positiv definit, positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit oder indefinit sind.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 5.36

3. Berechnen Sie jeweils die Eigenwerte und Basen für die Eigenräume der gegebenen Matrizen. Welche Matrizen sind diagonalisierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 6.1

4. Berechnen Sie jeweils die Eigenwerte und Basen für die Eigenräume der gegebenen Matrizen. Welche Matrix ist diagonalisierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 6.3

5. Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & -9 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie

(a) das charakteristische Polynom und die Eigenwerte der Matrix A.

(b) jeweils die algebraische und geometrische Vielfachheit.

(c) die zugehörigen Eigenvektoren bzw. Hauptvektoren.

(d) die Jordan'sche Normalform J und die Transformationsmatrix X, wobei $A = XJX^{-1}$.

Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 6.5

6. Gegeben seien die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie jeweils die Jordan'sche Normalform.
Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 6.6

7. Gegeben sei eine symmetrische Matrix A. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Vorzeichen der Eigenwerte von A und der Definitheit von A?
Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 6.9

8. Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie ihre Antwort.

(a) A ist singulär. $\Rightarrow$ Alle Eigenwerte von A sind 0.

(b) A ist diagonalisierbar. $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte haben die algebraische Vielfachheit 1.

(c) A ist diagonalisierbar. $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte haben die geometrische Vielfachheit 1.

(d) Ist n gerade, so hat A mindestens einen reellen Eigenwert.

(e) A ist symmetrisch. $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte von A sind reell.

(f) A ist diagonalisierbar. $\Rightarrow$ A hat n verschiedene reelle Eigenwerte.

(g) A ist diagonalisierbar. $\Rightarrow$ A hat n linear unabhängige Eigenvektoren.

(h) A ist symmetrisch. $\Rightarrow$ Alle Eigenvektoren von A sind positiv.

(i) A ist orthogonal. $\Rightarrow$ $\det A = 1$.

Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 6.10