1. Berechnen Sie jeweils die allgemeine Lösung des dreidimensionalen linearen Systems von Differentialgleichungen $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ mit

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 7.2

2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie die Lösung des linearen Systems von Differentialgleichungen

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \mathrm{e}^{5t}\boldsymbol{b}$$

   mit Anfangswert $\boldsymbol{x}(0) = (0, 1, 2)^T$ und Inhomogenität $\boldsymbol{b} = (-1, 2, -1)$.
   Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 7.4

3. Zeigen Sie, dass die Diffentialgleichung

$$x^{(4)}(t) - x^{(3)}(t) - 3x''(t) + 5x'(t) - 2x(t) = 0$$

   nur zwei linear unabhängige Lösungen von der Gestalt $x(t) := \mathrm{e}^{\alpha t}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 7.8

4. Zeigen Sie, dass die Diffentialgleichung aus Aufgabe 3 folgende vier linear unabhängige Lösungen besitzt: $x(t) = \mathrm{e}^t$, $x(t) = t\mathrm{e}^t$, $x(t) = t^2\mathrm{e}^t$ und $x(t) = \mathrm{e}^{-2t}$. Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an. Leiten Sie die gegebenen Lösungen her indem Sie die skalare Differentialgleichung 4. Ordnung auf ein System 1. Ordnung transformieren und lösen.
   Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 7.9

5. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\boldsymbol{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \sin(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 7.10 (b)

6. Gegeben sei das lineare Anfangswertproblem

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f}(t), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}(t) = \sin(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{x}_0 = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Partikulärlösung des inhomogenen Problems.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Problems.

(c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems und lösen Sie das Anfangswertproblem.

Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 7.12

7. Gegeben sei das lineare Anfangswertproblem

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f}(t), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte, Eigenvektoren und gegebenenfalls Hauptvektoren der Matrix A.

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems an.

(c) Bestimmen Sie eine Partikulärlösung des inhomogenen Problems.

(d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 7.13