1. Gegeben sei die Menge $M_2(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$, in welcher Matrizen der Bauart
$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$
mit $a, b \in \mathbb{R}$, enhalten sind.

   (a) Betrachten Sie nun $(M_2(\mathbb{R}), +)$ mit der üblichen Addition von Matrizen. Weisen Sie nach, dass $(M_2(\mathbb{R}), +)$ eine Gruppe darstellt.

   (b) Geben Sie zu
$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$
das inverse Element bezüglich $+$ an.

2. Geben Sie die Verknüpfungstabelle für die Addition $\oplus$ und die Multiplikation $\odot$ modulo 5 in $\mathbb{Z}_5$ an. Begründen Sie, dass $\mathbb{Z}_5$ mit den so definierten Verknüpfungen einen Körper bildet.

3. Betrachten Sie die Menge gegeben durch
$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon \det A = 1\}$$
mit $n \geq 2$.

   (a) Zeigen Sie, dass $SL(n, \mathbb{R})$ mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet.

   (b) Weiters zeigen Sie, dass es sich um keine abelsche Gruppe handelt.

   Anmerkung. Dies ist die sogenannte *spezielle lineare Gruppe.*

4. Sei $(G, \diamond)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass für alle $a \in G$ neben der Rechenregel $a \diamond e = a$ auch $e \diamond a = a$ gilt. Zeigen Sie zusätzlich, dass neben der Regenregel $a \diamond a^{-1} = e$ auch $a^{-1} \diamond a = e$ erfüllt ist. Dies gilt, obwohl die Gruppe nicht kommutativ ist und das Kommutativgesetz nicht ausgenutzt werden darf.

Aufgaben zum Lösen von Linearen Gleichungssystem sind die Folgenden:

5. Übungsskriptum, Beispiel 2.10 (d)
6. Übungsskriptum, Beispiel 2.7 (b)
7. Übungsskriptum, Beispiel 2.8
8. Übungsskriptum, Beispiel 2.9
9. Übungsskriptum, Beispiel 2.17 (a)

Lösungen

1. (a) Gruppenaxiome nachweisen

   (b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

2. Körperaxiome mithilfe der folgenden Rechenregeln für die Modulo-Operation nachweisen

   (1) $(a+b) \bmod m = \big((a \bmod m) + (b \bmod m)\big) \bmod m$

   (2) $(a+b) \bmod m = \big(a + (b \bmod m)\big) \bmod m$

   (3) $(a \bmod m) \bmod m = a \bmod m$

   (4) $(a \cdot b) \bmod m = \big((a \bmod m) \cdot (b \bmod m)\big) \bmod m$

3. (a) Gruppenaxiome nachweisen

   (b) Ein Gegenbeispiel kann durch $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ angegeben werden

4. $a \diamond a$ und $a \diamond (a \diamond a^{-1})$ passend umformen

5. siehe Übungsskriptum

6. siehe Übungsskriptum

7. siehe Übungsskriptum

8. siehe Übungsskriptum

9. siehe Übungsskriptum