1. Seien p_1 und p_2 quadratische Polynome, gegeben durch

$$p_1(x) = -x^2 - x + 1, \qquad p_2(x) = 2x^2 + 2x + 2.$$

   $U = \mathcal{L}(p_1, p_2)$ ist ein Unterraum des Polynomraumes $P_2 = \{ax^2 + bx + c\colon a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Zeigen Sie, dass $B = \{p_1, p_2\}$ eine Basis von U ist.

   (b) Bestimmen Sie die Dimension von U.

   (c) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass $q(x) = ax^2 - 2x + 6 \in U$ erfüllt ist.

2. Übungsskriptum, Beispiel 1.16
3. Übungsskriptum, Beispiel 1.18
4. Übungsskriptum, Beispiel 2.13
5. Übungsskriptum, Beispiel 2.4
6. Übungsskriptum, Beispiel 3.2
7. Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Überprüfen Sie φ auf Linearität.

   (b) Bestimmen Sie eine Basis K des Kerns und eine Basis B des Bilds der Abbildung φ.

   (c) Verifizieren Sie an diesem Beispiel die Beziehung $\mathrm{Rang}(A) = \dim\big(\mathrm{Bild}(\varphi)\big)$.

Lösungen

1. (a) Lineare Unabhängigkeit nachweisen und argumentieren, warum 2 Basisvektoren ausreichend sind.
   (b) $\dim U = 2$
   (c) $a = -2$

2. siehe Übungsskriptum

3. siehe Übungsskriptum

4. siehe Übungsskriptum

5. siehe Übungsskriptum

6. siehe Übungsskriptum

7. (a) Linearität nachweisen, zu zeigen ist also

   - $A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y}$,
   - $A(s\boldsymbol{x}) = sA\boldsymbol{x}$.

   (b) $K = \{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $B = \{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$
   (c) $\operatorname{Rang} A = \dim(\operatorname{Bild} A)$