1. Sei $B = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ eine Basis des Vektorraums V über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass
$$K\colon V \to \mathbb{R}^n, \quad K(\boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{v}]_B$$
eine lineare Abbildung darstellt.

2. Übungsskriptum, Beispiel 3.5 (b)

3. Übungsskriptum, Beispiel 3.8

4. Betrachten Sie die lineare Abbildung
$$\varphi\colon P_2 \to P_1, \quad \varphi(p) = p' + \int_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x.$$
Bestimmen Sie $[\varphi(B)]_C$ bezüglich der Basen
$$B = \left\{1, x, x^2\right\}, \qquad C = \{x+1, x-1\}.$$
Berechnen Sie das Bild und den Kern der Abbildung φ und beurteilen Sie ob die lineare Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

5. Übungsskriptum, Beispiel 3.6

6. Übungsskriptum, Beispiel 3.7

7. Sei die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch
$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_3 \end{pmatrix},$$
weiters sei $\boldsymbol{v} = (4, -1, -3)^T$ sowie B eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und C eine Basis des $\mathbb{R}^2$, mit
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
   (a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $A = [\varphi(E_3)]_{E_2}$ bezüglich der kanonischen Basen E_3 und E_2.
   (b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[\varphi(B)]_C$ bezüglich der Basen C und B durch direktes Ausrechnen.
   (c) Ermitteln Sie die Transformationsmatrizen $T = T_{B \leftarrow E_3}$ und $S = T_{C \leftarrow E_2}$ und berechnen Sie die Abbildungsmatrix $[\varphi(B)]_C$ mit Hilfe dieser Koordinatentransformationen und der Abbildungsmatrix aus (a).
   (d) Berechnen Sie $[\boldsymbol{v}]_B$ und ermitteln Sie $[\varphi(\boldsymbol{v})]_C$ unter Verwendung der Matrix $[\varphi(B)]_C$.

8. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und eine Basis $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ gegeben durch
$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie die duale Basis $B^* = \{b^1, b^2, b^3\}$ des Dualraums V^*.

Lösungen

1. Additivität and Homogenität nachrechnen
2. siehe Übungsskriptum
3. siehe Übungsskriptum
4. $[\varphi(B)]_C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$

   $\operatorname{Bild}\varphi = P_1$, $\operatorname{Kern}\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

   nicht injektiv, aber surjektiv
5. siehe Übungsskriptum
6. siehe Übungsskriptum
7. (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $[\varphi(B)]_C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   (c) $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $[\boldsymbol{v}]_B = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad [\varphi(\boldsymbol{v})]_C = \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \end{pmatrix}$
8. $b^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$