1. Sei V ein Vektorraum und U ein Unterraum von V gegeben durch $V = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ mit $U = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r)$. Weiters sei V mit einer Orthonormalbasis $B_1 = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ sowie U mit einer Orthonormalbasis $B_2 = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r\}$ ausgestattet.

   (a) Zeigen Sie, dass die orthogonale Projektion $P\colon V \to U$, mit
   $$P(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{r} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}_i \rangle \, \boldsymbol{b}_i,$$
   eine lineare Abbildung ist.

   (b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $A = [P(B_1)]_{B_2}$ der orthogonalen Projektion.

   (c) Bestimmen Sie den Rang und die Dimension des Kerns der Abbildungsmatrix A.

2. Übungsskriptum, Beispiel 5.1 (b) und (d)

3. Übungsskriptum, Beispiel 5.2 (b)

4. Übungsskriptum, Beispiel 5.18

5. Gegeben sei ein euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, ein Unterraum U und ein Vektor $\boldsymbol{v} \in V$. Betrachten Sie den konkreten Fall $V = \mathbb{R}^4$ mit dem kanonischen inneren Produkt, sowie
   $$U = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Verfahrens von Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis von U.

   (b) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten von $\boldsymbol{v}$ bezüglich der orthonormalen Basis gefunden in (a).

   (c) Bestimmen Sie nun jenen Vektor $\boldsymbol{u} \in U$, sodass $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\|_2$ minimal ist und berechnen Sie anschließend $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\|_2$.

6. Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung, die eine Drehung um den Winkel $\alpha \in [0,\, 2\pi)$ in $\mathbb{R}^2$ beschreibt.

   (a) Berechnen Sie die Drehung für die Basisvektoren der kanonischen Basis $E_2 = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ durch elementargeometrische Überlegungen und beschreiben Sie damit die Darstellungsmatrix $D = [\varphi(E_2)]_{E_2}$.

   (b) Zeigen Sie, dass die Matrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ orthogonal ist.

   (c) Berechnen Sie die Determinante von D und die Inverse D^{-1}.

   (d) Berechnen Sie für $\boldsymbol{x} = (1,1)^T$ und $\boldsymbol{y} = (2,0)^T$ die Ausdrücke

   $$D\boldsymbol{x}, \quad \|\boldsymbol{x}\|_2, \quad \|D\boldsymbol{x}\|_2$$

   sowie die Winkel zwischen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ und zwischen $D\boldsymbol{x}$ und $D\boldsymbol{y}$.

Lösungen

1. (a) Additivität und Homogenität nachrechnen

   (b) $A = \begin{pmatrix} | & & | & | & & | \\ \boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_r & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ | & & | & | & & | \end{pmatrix} \in K^{r \times n}$

   (c) $\operatorname{Rang} A = r,\ \dim(\operatorname{Kern} A) = n - r$

2. siehe Übungsskriptum 5.1

3. siehe Übungsskriptum 5.2

4. siehe Übungsskriptum 5.18

5. siehe Übungsskriptum 5.10

6. (a) $\varphi(\boldsymbol{e}_1) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))^T,\ \varphi(\boldsymbol{e}_2) = (-\sin(\alpha), \cos(\alpha))^T,\ D = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

   (b) Es gilt $DD^T = D^T D = I_2$.

   (c) $\det D = 1$

   (d) $D\boldsymbol{x} = (\cos(\alpha) - \sin(\alpha), \sin(\alpha) + \cos(\alpha))^T,\ \|\boldsymbol{x}\|_2 = \|D\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{2}$,
   $\sphericalangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sphericalangle(D\boldsymbol{x}, D\boldsymbol{y}) = \dfrac{\pi}{4}$