1. Übungsskriptum, Beispiel 6.7

2. Seien

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $A\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1$, $A\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2$ und $A\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ gilt.

   (b) Geben Sie mit der Information aus (a) das charakteristische Polynom von A an. Warum ist A diagonalisierbar? Geben Sie die Diagonalmatrix D und die zugehörige Transformationsmatrix X an, so dass $A = XDX^{-1}$ gilt.

3. Gegeben ist eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimmen Sie zum Eigenwert $\lambda = 1$ einen zugehörigen Eigenvektor $\boldsymbol{v}$.

   (b) Zeigen Sie, dass $p(\lambda) = -(\lambda - 1)^3$ das charakteristische Polynom von A darstellt und berechnen Sie alle Eigenwerte samt algebraischer Vielfachheit.

   (c) Ermitteln Sie alle Eigenvektoren und mögliche Hauptvektoren der Matrix A.

   (d) Berechnen Sie die Dimension aller Eigenräume. Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

   (e) Geben Sie eine reguläre Matrix $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sowie die Matrix $J \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, sodass $A = XJX^{-1}$ gilt, wobei J die Jordan'sche Normalform von A bezeichnet.

4. Übungsskriptum, Beispiel 7.4

5. Gegeben ist das folgende lineare AWP 1. Ordnung:

$$\boldsymbol{y}'(t) - A\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t), \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0, \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Die Matrix A hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ (mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1) und $\lambda_2 = 2$ (mit algebraischer Vielfachheit 1 und geometrischer Vielfachheit 1); $\boldsymbol{v}^{(1)} = (1, 0, 0)^T$ ist der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$ und $\boldsymbol{h}^{(1)} = (0, -1, 1)^T$ ist der zugehörige Hauptvektor; $\boldsymbol{v}^{(2)} = (1, 2, 2)^T$ ist der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$.

   (a) Geben Sie eine allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}_h(t)$ des homogenen Problems an.

   (b) Geben Sie eine Partikulärlösung $\boldsymbol{y}_p(t)$ des inhomogenen Problems für $\boldsymbol{f}(t) = (2, 1, 0)^T e^t$ an. Verwenden Sie den Ansatz $\boldsymbol{y}_p(t) = \boldsymbol{a}\, e^t$ mit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$.

(c) Seien $\boldsymbol{y}_h(t)$ und $\boldsymbol{y}_p(t)$ die Lösungen aus (a) und (b). Wie müssen Sie $\boldsymbol{y}_h(t)$ und $\boldsymbol{y}_p(t)$ kombinieren, um die allgemeine Lösung des inhomogen Problems $\boldsymbol{y}'(t) - A\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t)$ zu erhalten? Von wie vielen freien Parametern hängt sie ab? Berechnen Sie die Lösung $\boldsymbol{y}(t)$ des AWPs für $\boldsymbol{y}_0 = (3, 2, 1)^T$.

(d) Geben Sie eine Lösung $\boldsymbol{y}(t)$ des homogenen AWPs für $\boldsymbol{f}(t) = \mathbf{0}$ und $\boldsymbol{y}_0 = (1, 0, 1)^T$ an. Verwenden Sie Ihre Lösung aus (a) als Ansatz.

6. Übungsskriptum, Beispiel 7.6

Lösungen

1. siehe Übungsskriptum 6.7
2. (a) Ergibt sich durch Matrix-Vektor-Multiplikation

   (b) $p(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2,\ X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. (a) $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (b) Nachrechnen mittels $\det(A - \lambda I)$. $\lambda = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 3

   (c) Eigenvektor wurde bereits in (a) bestimmt. Hauptvektoren ergeben sich als

   $$\boldsymbol{h}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (d) $\dim E(1) = 1$, A ist nicht diagonalisierbar

   (e) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. siehe Übungsskriptum 7.4
5. (a) $\boldsymbol{y}_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}$

   (b) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

   (c) 3 freie Parameter

   $$\boldsymbol{y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t}$$

   $$\boldsymbol{y}(t) = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t}$$

   (d) $\boldsymbol{y}(t) = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}$
6. siehe Übungsskriptum 7.6