Gruppe B

1. Gegeben seien die Unterräume U und W des Vektorraums $V = \mathbb{R}^4$, wobei

$$U = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \colon \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\},$$

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 = 3t,\ \ x_2 = s - 2t,\ \ x_3 = 2s,\ \ x_4 = 2t,\ \ s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie Basen von U und W sowie die jeweiligen Dimensionen.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Kriteriums für direkte Summen, dass $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(c) Stellen Sie den Vektor $\boldsymbol{v} = (-2, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ als $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$, mit $\boldsymbol{u} \in U$ und $\boldsymbol{w} \in W$ dar.

Lösung.

(a) Die Basis von U berechnet sich aus

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{z_2 - 2z_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right) \iff$$

$$x_1 - x_3 = 0 \wedge -2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \text{ bzw. } x_1 = x_3 \wedge x_2 = x_3 - x_4.$$

Sei $x_3 = s$ und $x_4 = t$, dann ist

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} s \\ s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bzw. eine Basis von U ist gegeben durch

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und besitzt die Dimension 2.

Eine Basis von W ergibt sich aus $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3t \\ s - 2t \\ 2s \\ 2t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ zu

$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ und hat ebenfalls die Dimension 2.

(b) Es soll gezeigt werden, dass $\mathbb{R}^4 = U + W$ und $U \cap W = \{\boldsymbol{0}\}$. Dazu zeigen wir zunächst, dass die Basis der Summe der Unterräumen $U + W$ aus 4 linear unabhängigen Vektoren besteht und stellen das folgende Gleichungssystem auf

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Zeilenumformungen führen zu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{z_2 - z_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{z_3 - z_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{z_4 + z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{z_4 - \frac{1}{2} z_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$\implies$ $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ bzw. spannt $U + W$ den ganzen $\mathbb{R}^4$ auf.

Aus dem Dimensionsatz $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$ folgt $\dim(U \cap W) = 0$. Daraus schließen wir, dass $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

(c) Der Ansatz $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\in W}$ kann in die Matrixschreibweise umgeformt werden.

Durch wiederholtes Durchführen von Zeilenumformungen aus (b) kommt man auf die folgende gestaffelte Form

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

und schließlich auf die eindeutige Lösung des Systems $\boldsymbol{x} = (1, 2, 0, -1)^{\mathrm{T}}$.

Somit ist $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. Das folgende lineare Gleichungssystem der Form $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ ist gegeben durch

$$A\,\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 6 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bilden Sie die erweiterte Matrix $(A|\boldsymbol{b})$ und formen Sie diese unter Verwendung des Gauß-Algorithmus in die gestaffelte Form um.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{Rang} A$ sowie $\dim(\operatorname{Kern} A)$. Begründen Sie, warum das System lösbar ist.

(c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $\boldsymbol{x}$ des linearen Gleichungssystems.

(d) Begründen Sie, warum $(\operatorname{Kern} A,\ +)$ eine kommutative Gruppe bildet.

Lösung.

(a)

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{z_3 - z_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{z_2 - 2z_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(b) $\operatorname{Rang} A$ ist aus der gestaffelten Form in (a) ablesbar und beträgt $\operatorname{Rang} A = 2$. Die Dimension des Kerns folgt aus dem Dimensionssatz und beträgt $\dim(\operatorname{Kern} A) = n - \operatorname{Rang} A = 4 - 2 = 2$.
Aus der gestaffelten Form ist ebenfalls ersichtlich, dass das System konsistent ist bzw. dass gilt $\operatorname{Rang}(A|\boldsymbol{b}) = \operatorname{Rang} A$.

(c) Eine allgemeine Lösung wäre $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und errechnet sich aus

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 2x_1 - x_2 = 0 \wedge 2x_3 + 2x_4 = 2$$

bzw. aus $x_2 = 2x_1$ und $x_3 = -x_4 + 1$, wobei $x_1 = s$ und $x_4 = t,\ s,t \in \mathbb{R}$.

(d) Da Kern A ein Unterraum des $\mathbb{R}^4$ ist, bildet er unter Vektoraddition eine kommutative Gruppe.

3. Sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, wobei $V = P_2$ der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 ist und $W = \mathbb{R}^2$. Der Vektorraum V ist mit einer Basis $B_1 = \{1, x, x^2\}$ und einer Basis $B_2 = \{1-x, 1+x, x^2\}$ ausgestattet. Weiters sei die Abbildungsmatrix $[\varphi(B_1)]_{C_1}$ gegeben durch

$$[\varphi(B_1)]_{C_1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

sowie die Transformationsmatrix $T_{C_1 \leftarrow C_2}$ des Basiswechsels von C_2 zu C_1

$$T_{C_1 \leftarrow C_2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

wobei C_1 und C_2 zwei Basen von $W = \mathbb{R}^2$ sind.

(a) Fertigen Sie eine Skizze des kommutativen Diagramms an und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[\varphi(B_2)]_{C_2}$.

(b) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $T_{C_2 \leftarrow C_1}$.

(c) Sei $[\boldsymbol{v}]_{B_2} = (3, 1, -2)^{\mathrm{T}}$. Bestimmen Sie $[\boldsymbol{v}]_{B_1}$ und $[\varphi(\boldsymbol{v})]_{C_1}$.

Lösung.

$$\begin{tikzcd}
V & & W \\
{[\boldsymbol{v}]_{B_1}} \arrow[rr, "{[\varphi(B_1)]_{C_1}}"] \arrow[d, shift right, "T_{B_2\leftarrow B_1}"'] & & {[\varphi(\boldsymbol{v})]_{C_1}} \arrow[d, shift right, "T_{C_2\leftarrow C_1}"'] \\
{[\boldsymbol{v}]_{B_2}} \arrow[rr, "{[\varphi(B_2)]_{C_2}}"'] \arrow[u, dashed, shift right, "T_{B_1\leftarrow B_2}"'] & & {[\varphi(\boldsymbol{v})]_{C_2}} \arrow[u, dashed, shift right, "T_{C_1\leftarrow C_2}"']
\end{tikzcd}$$

(a) Die Abbildungsmatrix $[\varphi(B_2)]_{C_2}$ ergibt sich aus $[\varphi(B_2)]_{C_2} = T_{C_2 \leftarrow C_1}[\varphi(B_1)]_{C_1} T_{B_1 \leftarrow B_2}$, wobei

$$T_{C_2 \leftarrow C_1} = (T_{C_1 \leftarrow C_2})^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$T_{B_1 \leftarrow B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und beträgt somit $[\varphi(B_2)]_{C_2} = \begin{pmatrix} -1 & -11 & -1 \\ -1 & -7 & -1 \end{pmatrix}$.

Die Spalten der Transformationsmatrix $T_{B_1 \leftarrow B_2}$ berechnet man wie folgt

$$\begin{aligned}
1 - x = s_1 \cdot 1 + s_2 \cdot x + s_3 \cdot x^2 &\Rightarrow \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
1 + x = s_1 \cdot 1 + s_2 \cdot x + s_3 \cdot x^2 &\Rightarrow \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
x^2 = s_1 \cdot 1 + s_2 \cdot x + s_3 \cdot x^2 &\Rightarrow \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(b) $\det T_{C_2 \leftarrow C_1} = \dfrac{1}{\det T_{C_1 \leftarrow C_2}} = \dfrac{1}{-1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1} = -1$

(c) $[\boldsymbol{v}]_{B_1} = T_{B_1 \leftarrow B_2}[\boldsymbol{v}]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$[\varphi(\boldsymbol{v})]_{C_1} = [\varphi(B_1)]_{C_1}[\boldsymbol{v}]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$