Gruppe A

1. Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Sei $\boldsymbol{v}_1 = (0, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$. Zeigen Sie, dass $A\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1$ gilt, mit $\lambda_1 = 2$.

   (b) Der einzig weitere Eigenwert ist $\lambda_2 = 1$. Berechnen Sie den Eigenvektor $\boldsymbol{v}_2$ zu λ_2.

   (c) Bestimmen Sie den zu $\boldsymbol{v}_1$ gehörigen Hauptvektor $\boldsymbol{h}_1$.

   (d) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{h}_2 = (0, 1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ der zu $\boldsymbol{v}_2$ gehörige Hauptvektor ist.
   Geben Sie eine reguläre Matrix $X \in \mathbb{R}^{4\times4}$ sowie die Jordan'sche Normalform $J \in \mathbb{R}^{4\times4}$ an, sodass $A = XJX^{-1}$ gilt.

   (e) Geben Sie die homogene Lösung des linearen Differentialgleichungssystems 1. Ordnung
$$\boldsymbol{y}'(t) - A\boldsymbol{y}(t) = 0$$
   an und lösen Sie das Anfangswertproblem $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0 = (4, 6, 2, 6)^{\mathrm{T}}$.

Lösung.

(a) Berechnen der entsprechenden Terme führt zum gleichen Ergebnisvektor wie folgt.
$$A\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Ein Eigenvektor $\boldsymbol{v}_2$ ergibt sich als Lösung von $(A - \lambda_2 I)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$.
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2-\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda_2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda_2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aus der ersten Zeile folgt für die Einträge des Eigenvektors $v_1 = 0$, aus der zweiten folgt v_4 und aus der dritten $v_4 = 0$. Mit $v_2 := \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, wird die Lösung des linearen Gleichungssystems zu
$$\boldsymbol{v}_2 = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bestimmt, wodurch sich ein möglicher Eigenvektor mit $\alpha = 1$ zu

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt.

(c) Ein Hauptvektor zu $\boldsymbol{v}_1$ wird mithilfe des folgenden Gleichungssystems bestimmt.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda_1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda_1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Für die Einträge des Hauptvektors folgt aus der zweiten Zeile $h_2 = h_4$ und aus der dritten Zeile $h_4 = 1$. Aus der zweiten Zeile folgt $h_1 = h_4$. Mit $h_3 := \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, ergibt sich die Lösung des linearen Gleichungssystems zu

$$\boldsymbol{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit ein Hauptvektor als

$$\boldsymbol{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Ein Hauptvektor $\boldsymbol{h}_2$ zum Eigenvektor $\boldsymbol{v}_2$ muss die Bedingung $(A - \lambda_2 I)\boldsymbol{h}_2 = \boldsymbol{v}_2$ erfüllen.

$$(A - \lambda_2 I)\boldsymbol{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Jordan'sche Normalform J und die zugehörige Transformationsmatrix X sind

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e) Das Differentialgleichungssystem wird mithilfe der Aufgabe (d) gelöst.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}'(t) - A\boldsymbol{y}(t) &= 0 \\ \boldsymbol{y}'(t) &= XJX^{-1}\boldsymbol{y}(t) \\ X^{-1}\boldsymbol{y}'(t) &= JX^{-1}\boldsymbol{y}(t) \\ \boldsymbol{z}'(t) &= J\boldsymbol{z}(t) \end{aligned}$$

mit $\boldsymbol{z} = X^{-1}\boldsymbol{y}(t)$ und daher $\boldsymbol{z}' = X^{-1}\boldsymbol{y}'(t)$. Die allgemeine Lösung lautet dann

$$\boldsymbol{y}(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1 + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\left(t\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{h}_1\right) + c_3 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2 + c_4 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\left(t\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{h}_2\right).$$

Mit dem Anfangswert werden die Koeffizienten bestimmt als

$$\boldsymbol{y}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix},$$

woraus folgt

$$c_1 = 2,\ c_2 = 4,\ c_3 = 0,\ c_4 = 2.$$

Die Lösung des Differentialgleichungssystems mit gegebenem Anfangswert lautet

$$\boldsymbol{y}(t) = 2\mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\mathrm{e}^{2t} \left(t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + 2\mathrm{e}^{t} \left(t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

2. Gegeben sei der Vektorraum $V = \mathbb{R}^5$ mit dem kanonischen Skalarprodukt und ein Unterraum $U = \mathcal{L}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ mit

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \text{und} \ \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ und $\boldsymbol{u}_3$ eine Orthogonalbasis von U bilden. Wandeln Sie diese anschließend in eine Orthonormalbasis um.

(b) Sei $\boldsymbol{v} = (0, -2, -6, 1, 3)^{\mathrm{T}}$. Bestimmen Sie den Vektor $\boldsymbol{u} \in U$, sodass die Norm $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\|_2$ minimal wird.

(c) Bestimmen Sie eine Basis $\tilde{B}$ des orthogonalen Komplements $U^{\perp}$ des Unterraums U.

(d) Ermitteln Sie eine Orthonormalbasis von $U^{\perp}$.

Lösung.

(a) Es soll gezeigt werden, dass die Vektoren $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ linear unabhängig sind und dass für $i \neq j$ die Beziehung $\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j \rangle = 0$ gilt, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt darstellt.

Die lineare Unabhängigkeit ist gegeben, da die Linearkombination

$$s_1 \boldsymbol{u}_1 + s_2 \boldsymbol{u}_2 + s_3 \boldsymbol{u}_3 = \mathbf{0}$$

nur die triviale Lösung $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ hat, was sich aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} - s_3 &= 0 \\ 2s_1 + s_2 - 2s_3 &= 0 \\ s_2 &= 0 \end{aligned}$$

schließen lässt.

Die Orthogonalität folgt aus

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle &= 2\,(-2) + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 &&= 0 \\ \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle &= -2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0\,(-1) + 1\,(-2) + 1 \cdot 0 &&= 0 \\ \langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_1 \rangle &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + (-2) \cdot 2 + 0 \cdot 0 &&= 0. \end{aligned}$$

Um die Orthogonalbasis in eine Orthonormalbasis umzuwandeln, müssen die Vektoren $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ normiert werden. Die Normen berechnen sich zu

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u}_1\|_2 &= \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2 + 2^2 + 0^2} = 3, \\ \|\boldsymbol{u}_2\|_2 &= \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{10}, \\ \|\boldsymbol{u}_3\|_2 &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Somit ist eine Orthonormalbasis B von U gegeben durch

$$B = \left\{ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Der gesuchte Vektor $\boldsymbol{u}$ ist die orthogonale Projektion von $\boldsymbol{v}$ auf U und berechnet sich zu

$$\boldsymbol{u} = P(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{3} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_i \rangle \, \boldsymbol{u}_i = (0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}.$$

Daraus können wir schließen, dass $\boldsymbol{v} \perp U$ bzw. $\boldsymbol{v} \in U^{\perp}$.

(c) Es gilt, $\mathbb{R}^5 = U \oplus U^{\perp}$. Die Dimension von $U^{\perp}$ folgt daher aus dem Dimensionssatz $\dim U + \dim U^{\perp} = 5$ und beträgt $\dim U = 2$.

Außerdem muss für alle $\tilde{\boldsymbol{u}} \in U^{\perp}$ und alle $\boldsymbol{u} \in U$ gelten, dass $\langle \tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u} \rangle = 0$. Ein Vektor aus $U^{\perp}$ ergibt sich daher als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Die Zeilenumformungen führen zu

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{z_2+z_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{z_3-\frac{1}{2}z_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{z_3-\frac{1}{2}z_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right).$$

Somit ergibt sich eine Basis $\tilde{B}$ von $U^{\perp}$zu

$$\tilde{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -9 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(d) Anwenden des Gram-Schmidt-Verfahrens ergibt eine Orthonormalbasis von $U^{\perp}$. Alternativ lassen sich die Unterpunkte (c) und (d) auch gleichzeitig auflösen.

Unter Ausnutzung von $\boldsymbol{v} \in U^{\perp}$, lässt sich der eine fehlende Vektor, der mit $\boldsymbol{v}$ eine Orthogonalbasis von $U^{\perp}$ aufspannt als eine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{v} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

bestimmen. Eine Lösung ist gegeben durch $\boldsymbol{x} = (5, -2, 9, -4, 18)^{\mathrm{T}}$.

Das Normieren führt zu einer Orthonormalbasis B' von $U^{\perp}$

$$B' = \left\{ \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{15\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \\ -4 \\ 18 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Betrachten Sie den Vektorraum $V = P_2$ aller reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2. Weiters sei $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \mapsto \mathbb{R}$ eine Abbildung definiert durch

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} x^2 f(x) g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\langle f, g\rangle$ ein Skalarprodukt auf $V = P_2$ darstellt.

(b) Berechnen Sie die Norm von $f(x) = 7x^2 + 2x - 6$ bezüglich des gegebenen Skalarprodukts.

(c) Sei $g(x) = a\,x^2 + 2x + 1$. Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$, sodass $g(x)$ bezüglich des gegebenen Skalarprodukts orthogonal zu $f(x)$ aus (b) wird.

Lösung.

(a) Es soll gezeigt werden, dass die Eigenschaften der Linearität im ersten Argument, der Symmetrie und der positiven Definitheit erfüllt sind.

1. Für $f_1, f_2 \in P_2$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ist die Linearität im ersten Argument die Folge der Linearität der bestimmten Integralen

$$\begin{aligned}\langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g\rangle &= \int_{-1}^{1} x^2 \left[\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\right] g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda_1 \int_{-1}^{1} x^2 f_1(x) g(x)\,\mathrm{d}x + \lambda_2 \int_{-1}^{1} x^2 f_2(x) g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda_1 \langle f_1, g\rangle + \lambda_2 \langle f_2, g\rangle.\end{aligned}$$

2. Die Symmetrie folgt aus der Kommutativität des Produkts

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} x^2 f(x) g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^2 g(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \langle g, f\rangle.$$

3. Für alle $f \in P_2 \setminus \{0\}$ gilt

$$\langle f, f\rangle = \int_{-1}^{1} \underbrace{x^2 f(x)^2}_{>0}\,\mathrm{d}x > 0$$

bzw. wenn $f = 0$ ist $\langle f, f\rangle = 0$ und $\langle f, f\rangle$ kann nur dann null werden, wenn $f = 0$ ist. Die Abbildung $\langle f, g\rangle$ ist daher positiv definit.

(b)

$$\begin{aligned}\langle f, f\rangle &= \int_{-1}^{1} x^2 (7x^2 + 2x - 6)^2\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 49x^6 + 28x^5 - 80x^4 - 24x^3 + 36x^2\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{0}^{1} 49x^6 - 80x^4 + 36x^2\,\mathrm{d}x = 2\left(\frac{49}{7} - \frac{80}{5} + \frac{36}{3}\right) = 6\end{aligned}$$

Somit berechnet sich die Norm von f zu $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{6}$.

(c) Es gilt, $\langle f, g\rangle = 0$.

$$
\begin{aligned}
\langle f, g\rangle &= \int_{-1}^{1} x^2(7x^2+2x-6)(a\,x^2+2x+1)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} 7a\,x^6 + 2a\,x^5 - 6a\,x^4 + 14x^5 + 11x^4 - 10x^3 - 6x^2\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{1} 7a\,x^6 - 6a\,x^4 + 11x^4 - 6x^2\,\mathrm{d}x \\
&= 2\left(\frac{7a}{7} - \frac{6a}{5} + \frac{11}{5} - \frac{6}{3}\right) \\
&= -\frac{2a}{5} + \frac{2}{5} \;=\; 0 \quad\implies\quad a = 1
\end{aligned}
$$

Bonus Sei $Y = Y(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(t) \in \mathbb{R}^n$. Überprüfen Sie, ob

$$\int Y(t)\,\dot{\boldsymbol{c}}(t)\,\mathrm{d}t = Y(t)\,\boldsymbol{c}(t) - \int \dot{Y}(t)\,\boldsymbol{c}(t)\,\mathrm{d}t$$

gilt.

Lösung.

Für alle $j = 1, 2, \dots, n$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Y(t)\,\boldsymbol{c}(t))_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_{ij}(t)c_j(t)\right) = \sum_{i=1}^{n} \dot{Y}_{ij}(t)c_j(t) + Y_{ij}(t)\dot{c}_j(t) = \Big(\dot{Y}(t)\boldsymbol{c}(t) + Y(t)\dot{\boldsymbol{c}}(t)\Big)_j.$$

Daher lässt sich die Produktregel auf $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Y(t)\,\boldsymbol{c}(t)) = \dot{Y}(t)\,\boldsymbol{c}(t) + Y(t)\,\dot{\boldsymbol{c}}(t).$$

Integrieren der beiden Seiten nach t

$$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Y(t)\,\boldsymbol{c}(t))\,\mathrm{d}t = \int \Big[\dot{Y}(t)\,\boldsymbol{c}(t) + Y(t)\,\dot{\boldsymbol{c}}(t)\Big]\,\mathrm{d}t$$

führt zu

$$\int Y(t)\,\dot{\boldsymbol{c}}(t)\,\mathrm{d}t = Y(t)\,\boldsymbol{c}(t) - \int \dot{Y}(t)\,\boldsymbol{c}(t)\,\mathrm{d}t.$$