G.Schranz-Kirlinger
Institut für Analysis und Scientific Computing
TU Wien

LINEARE ALGEBRA FÜR TECHNISCHE PHYSIK (103.066)

Prüfung am 23. 6. 2006

Familienname	Vorname	Matrikelnummer

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf die erste Seite. Die Verwendung schriftlicher Unterlagen oder eines Taschenrechners ist nicht erlaubt. Alles Gute und viel Erfolg!

Beispiel 1	Beispiel 2	Beispiel 3	Beispiel 4	Beispiel 5	Gesamt

Note:

1) (10 Punkte)
Eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$\varphi(\vec{e}_1) = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \qquad \varphi(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2.$$

a) Als Basis des $\mathbb{R}^2$ wird die kanonische Basis E_2 gewählt. Geben Sie die Matrix A der Abbildung bezüglich der kanonischen Basis E_2 an. Berechnen Sie $\varphi(2\vec{e}_1+3\vec{e}_2)$ einmal direkt unter Verwendung der Lineariät und einmal unter Verwendung der Matrix A.

b) Bestimmen Sie die Matrix A' der Abbildung φ bezüglich der Basis

$$B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

c) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T des Basiswechsels von der kanonischen Basis E_2 zur Basis B. Berechnen Sie die Koordinaten des Vektors $(1,3)^T$ bezüglich der neuen Basis B unter Verwendung der Transformationsmatrix T.

d) Berechnen Sie die Koordinaten $[\varphi((1,3)^T)]_B$ des Vektors $\varphi((1,3)^T)$ bezüglich der neuen Basis B.

2) (10 Punkte)
Gegeben ist der Unterraum $U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} \perp (1, -1, 2)^T\}$ des $\mathbb{R}^3$ mit kanonischem Skalarprodukt.
Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.
Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten des Vektors $\vec{u} = (-3, 1, 2)^T \in U$.
Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion des Vektors $\vec{v} = (1, 1, 1)^T$ auf U.
Erweitern Sie die Orthonormalbasis von U zu einer Orthonomalbasis des $\mathbb{R}^3$.

3) (10 Punkte)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie $p(\lambda) = (2-\lambda)^4$;
Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A und die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten;
Berechnen Sie die zugehörigen Eigenvektoren bzw. Hauptvektoren;
Bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform J und die Transformationsmatrix T.

Hinweis: Hauptvektoren existieren nur bei geeigneter Wahl der Eigenvektoren!

4) (10 Punkte)
Definieren Sie die folgenden Begriffe:

a) **Rang** A einer $m \times n$–Matrix A (2 Punkte)

b) **reeller Vektorraum** V (4 Punkte)

c) **lineare Abhängigkeit** der Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in V$ (2 Punkte)

d) **lineare Hülle** der Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in V$ (2 Punkte)

5) (10 Punkte)
Entscheiden und **begründen** Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

a) Jede $n \times n$–Matrix A mit Rang $A = n$ besitzt eine Inverse. (1 Punkt)

b) Für alle $n \times n$–Matrizen A, B gilt $(AB)^T = A^T B^T$. (2 Punkte)

c) Jede $n \times n$–Matrix A mit n verschiedenen Eigenwerten besitzt eine Eigenbasis. (2 Punkte)

d) Sei A eine 4×4–Matrix mit $\det A = 0$, dann gilt $\text{Rang}(A) < 4$. (1 Punkt)

e) Sei A eine 3×3–Matrix, dann hat das homogene Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ immer eine nichttriviale Lösung $x \neq 0$. (2 Punkte)

f) Die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix sind reell und positiv. (2 Punkte)