Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1 (6 Punkte):
Aufgabe 2 (4 Punkte):
Aufgabe 3 (3 Punkte):
Aufgabe 4 (2 Punkte):
Aufgabe 5 (3 Punkte):
Aufgabe 6 (2 Punkte):
Aufgabe 7 (2 Punkte):
Aufgabe 8 (4 Punkte):
Aufgabe 9 (6 Punkte):
Aufgabe 10 (1 Punkt):
Aufgabe 11 (3 Punkte):
Aufgabe 12 (1 Punkt):
Aufgabe 13 (1 Punkt):
Aufgabe 14 (2 Punkte):
Aufgabe 15 (2 Punkte):
Aufgabe 16 (3 Punkte):
Aufgabe 17 (2 Punkte):
Aufgabe 18 (2 Punkte):
Aufgabe 19 (1 Punkt):

Gesamtpunkte (50 Punkte):

Vorlesungsprüfung (150 Minuten)
VO Lineare Algebra für TPH

11. Oktober 2019

- Tragen Sie bitte Ihre persönlichen Daten ein!
- Keine Verwendung schriftlicher Unterlagen!
- Einzeiliger, nicht programmierbarer Taschenrechner ist erlaubt!
- Schreiben Sie leserlich!
- Verwenden Sie einen Kugelschreiber für Ihre Lösungen, *keinen* Bleistift!

Aufgabe 1 (6 Punkte). Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ in der Form

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{array} \right).$$

Elementare Zeilenumformungen führen auf das System

$$\left(\begin{array}{c|c} A' & b' \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 0 \end{array} \right).$$

(a) Wenn x eine Lösung von $Ax = b$ ist, gilt dann auch $A'x = b'$? Falls ja, gilt auch die Umkehrung? Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Was ist der Rang von A? Was ist der Rang von A'? Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Was ist der Rang von $\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right)$? Was ist der Rang von $\left(\begin{array}{c|c} A' & b' \end{array} \right)$? Begründen Sie Ihre Antwort!

(d) Was ist die Dimension des Kerns von A? Was ist die Dimension des Kerns von A'? Begründen Sie Ihre Antwort!

(e) Geben Sie eine Basis vom Bild von A an. Ist die Basis eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort!

(f) Hat das Gleichungssystem $Ax = b$ eine Partikulärlösung? Begründen Sie Ihre Antwort!

(g) Ist die Lösung von $Ax = b$ eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung zu Aufgabe 1.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ in der Form

$$\left(A \mid b \right) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 2 & -4 & 2 & 6 & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 4 & 12 & -2 \\ 6 & 4 & -8 & -6 & -18 & 4 \end{array}\right).$$

Elementare Zeilenumformungen führen auf das System

$$\left(A' \mid b' \right) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

(a) Welches Gleichungssystem sollte man also lösen, um den Kern zu bestimmen?

(b) Welche Dimension hat Kern(A)? Berechnen Sie eine Basis für den Kern von A!

(c) Geben Sie mit Hilfe des Kerns alle Lösungen des Gleichungssystems $Ax = b$ an!

Lösung zu Aufgabe 2.

Aufgabe 3 (3 Punkte). Gegeben sei eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Sei λ^* ein Eigenwert von A. Die Dimension des Eigenraums $E(\lambda^*)$ sei $d = \dim E(\lambda^*) \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(a) Geben Sie eine Formel für das zu A gehörige charakteristische Polynom $p(\lambda)$ an.

(b) Formulieren Sie eine Gleichung, die der Eigenwert λ^* erfüllt.

(c) Geben Sie eine von d abhängige Formel für die geometrische Vielfachheit $g(\lambda^*)$ von λ^* an!

Lösung zu Aufgabe 3.

Aufgabe 4 (2 Punkte). Gegeben sei die quadratische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

und deren charakteristisches Polynom

$$p(\lambda) = -(\lambda - 2)^3.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A sowie deren algebraische Vielfachheiten. Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung zu Aufgabe 4.

Aufgabe 5 (3 Punkte). Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

hat den algebraisch dreifachen Eigenwert $\lambda = 1$. Für $\lambda = 1$ betrachte man die Matrix

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mittels elementarer Zeilenumformungen erhält man aus $A - \lambda I$ die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Eigenraum $E(\lambda)$ zu $\lambda = 1$ und dessen Dimension $\dim E(\lambda)$. Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Bestimmen Sie einen Eigenvektor v zum Eigenwert $\lambda = 1$.

Lösung zu Aufgabe 5.

Aufgabe 6 (2 Punkte). Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

hat den Eigenwert $\lambda = 1$. Betrachten Sie die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie für jeden der Vektoren an, ob es sich um einen Eigenvektor (zum Eigenwert $\lambda = 1$), einen Hauptvektor (zum Eigenwert $\lambda = 1$), oder um keines der beiden handelt. Begründen Sie Ihre Antworten!

Lösung zu Aufgabe 6.

Aufgabe 7 (2 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine quadratische Matrix. Für Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ sei

$$(A - \lambda I)a = \mathbf{0}\,, \qquad (A - \lambda I)b = a\,, \qquad (A - \lambda I)c = b\,.$$

(a) Geben Sie die Jordan'sche Normalform J von A und die Transformationsmatrix X an, für die die Zerlegung $XJX^{-1} = A$ gilt.

(b) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung zu Aufgabe 7.

Aufgabe 8 (4 Punkte). Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

Hinweis. A ist diagonalisierbar und hat drei unterschiedliche reelle Eigenwerte.

Lösung zu Aufgabe 8.

Aufgabe 9 (6 Punkte). Gegeben ist das folgende lineare AWP 1. Ordnung:

$$y'(t) - Ay(t) = f(t), \quad y(0) = y_0,$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \sin(3t)\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(3t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix A drei unterschiedliche reelle Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ besitzt.

(a) Seien $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)} \in \mathbb{R}^3\backslash\{\mathbf{0}\}$ die zugehörigen Eigenvektoren. Geben Sie eine Formel für die allgemeine Lösung $y_h(t)$ des homogenen Problems an.

(b) Geben Sie eine Partikulärlösung $y_p(t)$ des inhomogenen Problems an. Verwenden Sie den Ansatz

$$y_p(t) = a\,\sin(3t) + b\,\cos(3t) \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}^3.$$

(c) Seien $y_h(t)$ und $y_p(t)$ die Lösungen aus (a) und (b). Wie müssen Sie $y_h(t)$ und $y_p(t)$ kombinieren, um die allgemeine Lösung des inhomogen Problems $y'(t) - Ay(t) = f(t)$ zu erhalten? Von wie vielen freien Parametern hängt sie ab? Wie bestimmt man die Werte der Parameter, um die Lösung des AWPs zu bekommen?

Lösung zu Aufgabe 9.

Aufgabe 10 (1 Punkt). Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, welche einen algebraisch dreifachen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ hat. Dazu gibt es zwei linear unabhängige Eigenvektoren v_1 und v_2, sowie zu v_2 noch einen Hauptvektor h_2. Wie sehen die die Matrizen $X, J \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ aus, mit denen man A mittels Jordan'scher Normalform als $A = XJX^{-1}$ darstellen kann?

Lösung zu Aufgabe 10.

Aufgabe 11 (3 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beantworten Sie die folgenden Fragen.

(a) Es gelte: Sei $n = 2$. Geben Sie ein Beispiel einer invertierbaren, aber nicht diagonalisierbaren Matrix A an.

(b) Es gelte: Die Spaltenvektoren von A erzeugen den $\mathbb{R}^n$. Dann folgt

$$\det(A) \boxed{} 0.$$

Fügen Sie den korrekten Vergleichsoperator $\in \{<, \leq, =, \neq, \geq, >\}$ in die Box ein!

(c) Es gelte: Die lineare Abbildung $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$ ist nicht injektiv. Was wissen Sie dadurch über die Eigenwerte von A?

(d) Es gelte: Die lineare Abbildung $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$ ist nicht surjektiv. Was wissen Sie dadurch über die Eigenwerte von A?

(e) Wie stehen die folgenden Aussagen zueinander?

$$\boxed{A \text{ ist regulär.}} \quad \boxed{\phantom{\Rightarrow \text{ und } \not\Leftarrow}} \quad \boxed{\text{Das Bild von } A \text{ ist eine echte Teilmenge von } \mathbb{R}^n.}$$

Fügen Sie sie korrekte Beziehung ein! $\left(\boxed{\Rightarrow \text{ und } \not\Leftarrow}, \boxed{\not\Rightarrow \text{ und } \Leftarrow}, \boxed{\not\Rightarrow \text{ und } \not\Leftarrow}, \text{ oder } \boxed{\Leftrightarrow}\right)$

(f) Es gelte: A ist symmetrisch und positiv definit. Begründen Sie, warum $\operatorname{Spur}(A) > 0$.

Lösung zu Aufgabe 11.

Aufgabe 12 (1 Punkt). Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 12.

Aufgabe 13 (1 Punkt). Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 13.

Aufgabe 14 (2 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix.

(a) Definieren Sie Bild(A).

(b) Sei $n = m$ und A regulär. Wie sieht Bild(A) in diesem konkreten Fall aus und was ist seine Dimension?

Lösung zu Aufgabe 14.

Aufgabe 15 (2 Punkte). Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

(1) $\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$

(2) $b \in \mathcal{B}(A)$

(3) $b \perp \mathrm{Kern}(A^\top)$

(4) A hat vollen Rang

(5) $\det(A) \neq 0$

(6) $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A|b)$

(7) $\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{R}^n$

(8) $b \in \mathrm{Kern}(A)$

(9) b ist eine Spalte von A

Beantworten Sie die folgenden Fragen:

(a) Sei $m < n$. Welche der obigen Aussagen sind jeweils hinreichend dafür, dass das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung besitzt?

(b) Sei $n = m$. Welche der obigen Aussagen sind jeweils hinreichend dafür, dass das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ eine *eindeutige* Lösung besitzt?

Lösung zu Aufgabe 15.

Aufgabe 16 (3 Punkte). Sei V ein n-dimensionaler linearer Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$.

(a) Geben Sie die definierenden Eigenschaften einer Norm $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ an.

(b) Geben Sie die definierenden Eigenschaften eines Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ an.

(c) Formulieren Sie den Satz von Pythagoras.

(d) Formulieren Sie die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung.

Lösung zu Aufgabe 16.

Aufgabe 17 (2 Punkte). Vervollständigen Sie folgenden Text:

Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ und ein $v \in \boxed{}$ heißen Eigenwert und zugehöriger Eigenvektor von $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$,

falls $\boxed{}$ gilt.

Die Eigenwerte werden berechnet, indem man die Nullstellen von $p(\lambda) = \boxed{}$ berechnet.

Die zugehörigen Eigenvektoren erhält man durch Lösen von $\boxed{} = 0$.

Aufgabe 18 (2 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Verbinden Sie in der folgenden Aufzählung Eigenschaften auf der linken Seite durch einen Implikationspfeil ($\Leftarrow$ oder $\Rightarrow$) mit der (den) jeweils passenden Eigenschaft(en) auf der rechten Seite, um insgesamt vier wahre Aussagen zu erhalten (*zusätzlich* zu beispielsweise 3. $\Longrightarrow$ 8.):

1. A ist orthogonal	5. Es gibt eine orthonormale Eigenbasis
2. A ist symmetrisch	6. Für die Eigenwerte gilt $\lvert\lambda\rvert = 1$
3. A ist regulär	7. Für die Eigenwerte gilt $\lambda \in \mathbb{R}$
4. A ist singulär	8. $\det(A) \neq 0$.

Lösung zu Aufgabe 18.

Aufgabe 19 (1 Punkt). Geben Sie ein möglichst einfaches Beispiel einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die reelle Eigenwerte hat, aber nicht symmetrisch ist.

Hinweis. Wählen Sie n nicht zu groß.

Lösung zu Aufgabe 19.