Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1 (3 Punkte):	
Aufgabe 2 (2 Punkte):	
Aufgabe 3 (3 Punkte):	
Aufgabe 4 (2 Punkte):	
Aufgabe 5 (2 Punkte):	
Aufgabe 6 (6 Punkte):	
Aufgabe 7 (4 Punkte):	
Aufgabe 8 (4 Punkte):	
Aufgabe 9 (2 Punkte):	
Aufgabe 10 (4 Punkte):	
Aufgabe 11 (2 Punkte):	
Aufgabe 12 (2 Punkte):	
Aufgabe 13 (3 Punkte):	
Aufgabe 14 (2 Punkte):	
Aufgabe 15 (2 Punkte):	
Aufgabe 16 (1 Punkt):	
Aufgabe 17 (1 Punkt):	
Aufgabe 18 (3 Punkte):	
Aufgabe 19 (1 Punkt):	
Aufgabe 20 (1 Punkt):	
Gesamtpunkte (50 Punkte):	

Vorlesungsprüfung (150 Minuten)
VO Lineare Algebra für TPH

9. Oktober 2020

- Tragen Sie bitte Ihre persönlichen Daten ein!
- Keine Verwendung schriftlicher Unterlagen!
- Einzeiliger, nicht programmierbarer Taschenrechner ist erlaubt!
- Schreiben Sie leserlich!
- Verwenden Sie einen Kugelschreiber für Ihre Lösungen, *keinen* Bleistift!

Aufgabe 1 (3 Punkte). Gegeben sei eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Sei λ^* ein Eigenwert von A. Die geometrische Vielfachheit von λ^* sei $g = g(\lambda^*) \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Die algebraische Vielfachheit von λ^* sei $a = a(\lambda^*) \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(a) Geben Sie eine Formel für das zu A gehörige charakteristische Polynom $p(\lambda)$ an.

(b) Kann $g \leq a$ gelten? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Kann $a \leq g$ gelten? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Aufgabe 1.

Aufgabe 2 (2 Punkte). Gegeben sei die quadratische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

(a) Geben Sie das charakteristisches Polynom von A an!

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A sowie deren algebraische Vielfachheiten. Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung zu Aufgabe 2.

Aufgabe 3 (3 Punkte). Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

hat den algebraisch zweifachen Eigenwert $\lambda = -1$. Für $\lambda = -1$ betrachte man die Matrix

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mittels elementarer Zeilenumformungen erhält man aus $A - \lambda I$ die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Eigenraum $E(\lambda)$ zu $\lambda = -1$ und dessen Dimension $\dim E(\lambda)$. Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Bestimmen Sie einen Eigenvektor v zum Eigenwert $\lambda = -1$.

Lösung zu Aufgabe 3.

Aufgabe 4 (2 Punkte). Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A hat den algebraisch zweifachen Eigenwert $\lambda = -1$. Geben Sie für jeden der Vektoren u_1, u_2, u_3, u_4 an, ob es sich um einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = -1$, einen Hauptvektor zum Eigenwert $\lambda = -1$, oder um keines der beiden handelt. Begründen Sie Ihre Antworten!

Lösung zu Aufgabe 4.

Aufgabe 5 (2 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine quadratische Matrix. Für Vektoren $f, g, h \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ sei

$$(A - \lambda I)f = g\,, \qquad (A - \lambda I)g = h\,, \qquad (A - \lambda I)h = \mathbf{0}\,.$$

(a) Geben Sie die Jordan'sche Normalform J von A und die Transformationsmatrix X an, für die die Zerlegung $XJX^{-1} = A$ gilt.

(b) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung zu Aufgabe 5.

Aufgabe 6 (6 Punkte). Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ in der Form

$$\left(\, A \mid b \, \right) = \left(\begin{array}{rrrrr|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & \alpha \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \delta \end{array} \right),$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Elementare Zeilenumformungen führen auf das System

$$\left(\, A' \mid b' \, \right) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & \beta + \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - \beta - 3\gamma - 3\delta \end{array} \right).$$

(a) Was ist der Rang von A? Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Welche Dimension hat das Bild von A? Geben Sie eine Basis von Bild von A an. Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Für welche Werte $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem $Ax = b$ eine Lösung? Wann hat es keine Lösung? Begründen Sie Ihre Antwort!

(d) Wie sieht die allgemeine Lösung von $Ax = b$ aus, falls sie existiert? Ist sie eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung zu Aufgabe 6.

Aufgabe 7 (4 Punkte). Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ in der Form

$$\left(\ A \mid b\ \right) = \left(\begin{array}{rrrrr|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & \alpha \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \delta \end{array}\right).$$

Elementare Zeilenumformungen führen auf das System

$$\left(\ A' \mid b'\ \right) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & \beta+\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-\beta-3\gamma-3\delta \end{array}\right).$$

(a) Bestimmen Sie Kern(A)? Begründen Sie Ihr Vorgehen / Ihre Rechnung!

(b) Welche Dimension hat Kern(A)? Ist Kern(A) ein Vektorraum? Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Was ist die Lösungsmenge von $Ax = b$ für $b = (0, 6, 0, -2)^\top$? Begründen Sie Ihre Antwort!

(d) Was ist die Lösungsmenge von $Ax = b$ für $b = (6, 0, 0, -2)^\top$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung zu Aufgabe 7.

Aufgabe 8 (4 Punkte). Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie Eigenwerte, Eigenvektoren und Hauptvektoren der Matrix A. Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten jedes Eigenwertes.

Lösung zu Aufgabe 8.

Aufgabe 9 (2 Punkte). Wir betrachten das homogene System 1. Ordnung

$$\boldsymbol{y}'(t) - A\boldsymbol{y}(t) = 0$$

mit konstanter Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Geben Sie eine Formel für die allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}(t)$ des Systems in den folgenden Fällen an:

(a) A ist nicht diagonalisierbar und hat zwei unterschiedliche reelle Eigenwerte: λ_1 (mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1) und λ_2 (mit algebraischer Vielfachheit 1 und geometrischer Vielfachheit 1); $\boldsymbol{v}^{(1)}$ ist der Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 und $\boldsymbol{h}^{(1)}$ ist der zugehörige Hauptvektor; $\boldsymbol{v}^{(2)}$ ist der Eigenvektor zum Eigenwert λ_2.

(b) A ist diagonalisierbar mit drei unterschiedlichen reellen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und zugehörigen Eigenvektoren $\boldsymbol{v}^{(1)}$, $\boldsymbol{v}^{(2)}$, $\boldsymbol{v}^{(3)}$.

(c) A ist nicht diagonalisierbar und hat den Eigenwert λ (mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 1); $\boldsymbol{v}$ ist der Eigenvektor zum Eigenwert λ, $\boldsymbol{h}^{(1)}$ ist ein zugehöriger Hauptvektor erster Stufe und $\boldsymbol{h}^{(2)}$ ist ein zugehöriger Hauptvektor zweiter Stufe.

(d) A ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

aus Aufgabe 8.

Lösung zu Aufgabe 9.

Aufgabe 10 (4 Punkte). Gegeben ist das folgende lineare AWP 1. Ordnung:

$$\boldsymbol{y}'(t) - A\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t), \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0, \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ (mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1) und $\lambda_2 = 2$ (mit algebraischer Vielfachheit 1 und geometrischer Vielfachheit 1); $\boldsymbol{v}^{(1)} = (1, 0, 0)^T$ ist der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$ und $\boldsymbol{h}^{(1)} = (0, -1, 1)^T$ ist der zugehörige Hauptvektor; $\boldsymbol{v}^{(2)} = (1, 2, 2)^T$ ist der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$.

(a) Geben Sie eine allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}_h(t)$ des homogenen Problems an.

(b) Geben Sie eine Partikulärlösung $\boldsymbol{y}_p(t)$ des inhomogenen Problems für $\boldsymbol{f}(t) = (2, 1, 0)^T e^t$ an. Verwenden Sie den Ansatz $\boldsymbol{y}_p(t) = \boldsymbol{a}\, e^t$ mit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$.

(c) Seien $\boldsymbol{y}_h(t)$ und $\boldsymbol{y}_p(t)$ die Lösungen aus (a) und (b). Wie müssen Sie $\boldsymbol{y}_h(t)$ und $\boldsymbol{y}_p(t)$ kombinieren, um die allgemeine Lösung des inhomogen Problems $\boldsymbol{y}'(t) - A\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t)$ zu erhalten? Von wie vielen freien Parametern hängt sie ab? Berechnen Sie die Lösung $\boldsymbol{y}(t)$ des AWPs für $\boldsymbol{y}_0 = (3, 2, 1)^T$.

(d) Geben Sie eine Lösung $\boldsymbol{y}(t)$ des homogenen AWPs für $\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{y}_0 = (1, 0, 1)^T$ an. Verwenden Sie Ihre Lösung aus (a) als Ansatz.

Lösung zu Aufgabe 10.

Aufgabe 11 (2 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix.

(a) Definieren Sie $\mathrm{Bild}(A)$.

(b) Sei $n = m$ und A bijektiv. Wie sieht das $\mathrm{Bild}(A)$ in diesem konkreten Fall aus und was ist seine Dimension?

Lösung zu Aufgabe 11.

Aufgabe 12 (2 Punkte). Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

(1) b ist eine Spalte von A

(2) $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A|b)$

(3) A hat vollen Spalten- und Zeilenrang

(4) $\det(A) \neq 0$

(5) $b \in \mathrm{Bild}(A)$

(6) $\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{R}^n$

(7) $b \in \mathrm{Kern}(A)$

(8) $\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$

(9) $b \perp \mathrm{Kern}(A^\top)$

Beantworten Sie die folgenden Fragen:

(a) Sei $m < n$. Welche der obigen Aussagen (sofern sinnvoll) sind jeweils hinreichend dafür, dass das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung besitzt?

(b) Sei $n = m$. Welche der obigen Aussagen sind jeweils hinreichend dafür, dass das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ eine *eindeutige* Lösung besitzt?

Lösung zu Aufgabe 12.

Aufgabe 13 (3 Punkte). Sei V ein n-dimensionaler linearer Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$.

(a) Geben Sie die Definition eines *Unterraumes* U von V an.

(b) Geben Sie die Definition der *direkten Summe* zweier Unterräume U, W von V an.

(c) Sei V zusätzlich Euklidisch. Geben Sie die Definition des *Orthogonalraumes* eines Unterraumes U von V an.

(d) Formulieren Sie den Satz über die Bestapproximation im Euklidischen Vektorraum $(V, \|\cdot\| := \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle})$.

(e) Machen Sie zu (d) eine Skizze im $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.

Lösung zu Aufgabe 13.

Aufgabe 14 (2 Punkte). Vervollständigen Sie den folgenden Text:

Sei V ein Euklidischer Vektorraum der Dimension n und $B := \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ eine Basis von V.

- Die Basis B heißt *Orthogonalbasis* von V, falls $\boxed{}$ gilt.
- Die Basis B heißt *Orthonormalbasis* (ONB) von V, falls $\boxed{}$ gilt.

Falls B eine ONB ist, kann ein Vektor $\boldsymbol{v} \in V$ in dieser Basis als

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \boldsymbol{b}_i$$

dargestellt werden. Die v_i heißen $\boxed{}$ von $\boldsymbol{v}$ zur Basis B und können über

$v_i = \boxed{}$ berechnet werden.

Aufgabe 15 (2 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Verbinden Sie in der folgenden Aufzählung Eigenschaften auf der linken Seite durch einen Implikationspfeil ($\Leftarrow$ oder $\Rightarrow$) mit der (den) jeweils passenden Eigenschaft(en) auf der rechten Seite, um insgesamt vier wahre Aussagen zu erhalten (*zusätzlich* zu beispielsweise 7. $\Longrightarrow$ 4.):

1. Es gibt eine orthonormale Eigenbasis	5. A ist orthogonal
2. $\det(A) \geq 0$.	6. A ist singulär
3. Für alle Eigenwerte gilt $\lvert\lambda\rvert = 1$	7. A ist symmetrisch
4. Für alle Eigenwerte gilt $\lambda \in \mathbb{R}$	8. A ist regulär

Lösung zu Aufgabe 15.

Aufgabe 16 (1 Punkt). Geben Sie ein möglichst einfaches Beispiel einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ für ein konkretes n an, die reelle Eigenwerte hat, aber nicht symmetrisch ist. Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis. Wählen Sie n nicht zu groß.

Lösung zu Aufgabe 16.

Aufgabe 17 (1 Punkt). Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, welche einen algebraisch dreifachen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ hat. Dazu gibt es zwei linear unabhängige Eigenvektoren v_1 und v_2, sowie zu v_2 einen Hauptvektor h_2. Wie sehen die Matrizen $X, J \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ aus, mit denen man A mittels Jordan'scher Normalform als $A = XJX^{-1}$ darstellen kann?

Lösung zu Aufgabe 17.

Aufgabe 18 (3 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beantworten Sie die folgenden Fragen.

(a) Es gelte: Die lineare Abbildung $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$ ist nicht surjektiv. Was wissen Sie dadurch über die Eigenwerte von A?

(b) Es gelte: Die Spaltenvektoren von A erzeugen einen Teilraum des $\mathbb{R}^n$. Dann folgt

$$\det(A) \;\boxed{}\; 0.$$

Fügen Sie, falls möglich, die korrekte Antwort $\in \{\boxed{<}, \boxed{\leq}, \boxed{=}, \boxed{\neq}, \boxed{\geq}, \boxed{>}\}$ ein oder kreuzen Sie hier das Kästchen ☐ an, falls keine eindeutige Aussage getroffen werden kann!

(c) Es gelte: Die Matrix A ist diagonalisierbar bzw. diagonalähnlich. Was bedeutet das?

(d) Weshalb gilt die folgende Implikation?

$$\boxed{A = A^T \text{ und } x^T A x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^{n\times n} \setminus \{0\}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\operatorname{Spur}(A) > 0}$$

(e) Es gelte: $\det(A) = -9$. Dann folgt

$$\det(A^T A) = \boxed{}.$$

Fügen Sie die korrekte Antwort $\in \{\boxed{-81}, \boxed{-3}, \boxed{-1}, \boxed{0}, \boxed{1}, \boxed{3}, \boxed{81}, \boxed{\text{nicht berechenbar}}\}$ ein!

(f) Es gelte: Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gibt es höchstens ein $x \in \mathbb{R}^n$, sodass $Ax = y$. Welche hierzu äquivalente Aussage können Sie über die Eigenwerte von A treffen?

Lösung zu Aufgabe 18.

Aufgabe 19 (1 Punkt). Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & -14 \\ 6 & 19 & 10 & -45 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 19.

Aufgabe 20 (1 Punkt). Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -24 & 93/9 \\ -3/27 & 3 & -80 & -39 \\ 0 & 0 & 7 & 1/3 \\ 0 & 0 & -4 & 5/6 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 20.