Familienname:	Aufgabe 1 (3 Punkte):
	Aufgabe 2 (2 Punkte):
Vorname:	Aufgabe 3 (3 Punkte):
	Aufgabe 4 (2 Punkte):
Matrikelnummer:	Aufgabe 5 (2 Punkte):
	Aufgabe 6 (6 Punkte):
	Aufgabe 7 (4 Punkte):
	Aufgabe 8 (4 Punkte):
	Aufgabe 9 (2 Punkte):
	Aufgabe 10 (4 Punkte):
	Aufgabe 11 (2 Punkte):
	Aufgabe 12 (2 Punkte):
	Aufgabe 13 (3 Punkte):
	Aufgabe 14 (2 Punkte):
	Aufgabe 15 (2 Punkte):
	Aufgabe 16 (1 Punkt):
	Aufgabe 17 (1 Punkt):
	Aufgabe 18 (3 Punkte):
	Aufgabe 19 (1 Punkt):
	Aufgabe 20 (1 Punkt):
	Gesamtpunkte (50 Punkte):

Vorlesungsprüfung (150 Minuten)
VO Lineare Algebra für TPH

24. Februar 2020

- Tragen Sie bitte Ihre persönlichen Daten ein!
- Keine Verwendung schriftlicher Unterlagen!
- Einzeiliger, nicht programmierbarer Taschenrechner ist erlaubt!
- Schreiben Sie leserlich!
- Verwenden Sie einen Kugelschreiber für Ihre Lösungen, *keinen* Bleistift!

Aufgabe 1 (3 Punkte). Gegeben sei eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Sei λ^* ein Eigenwert von A. Die geometrische Vielfachheit von λ^* sei $g = g(\lambda^*) \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Die algebraische Vielfachheit von λ^* sei $a = a(\lambda^*) \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(a) Geben Sie eine Formel für das zu A gehörige charakteristische Polynom $p(\lambda)$ an.

(b) Kann $g \leq a$ gelten? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Kann $a \leq g$ gelten? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Aufgabe 1.

- *a)* $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
- *b) Ja. Es gilt sogar stets* $g \leq a$.
- *c) Ja. Das gilt im Fall* $g = a$.

Aufgabe 2 (2 Punkte). Gegeben sei die quadratische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

(a) Geben Sie das charakteristisches Polynom von A an!

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A sowie deren algebraische Vielfachheiten. Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung zu Aufgabe 2.

- *(1.0 Punkte)* $p(\lambda) = (-7-\lambda)^3(3-\lambda)$
- *(0.5 Punkte) Eigenwert* $\lambda = -7$ *mit algebraischer Vielfachheit* 3.
- *(0.5 Punkte) Eigenwert* $\lambda = 3$ *mit algebraischer Vielfachheit* 1.

Aufgabe 3 (3 Punkte). Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

hat den algebraisch zweifachen Eigenwert $\lambda = -1$. Für $\lambda = -1$ betrachte man die Matrix

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mittels elementarer Zeilenumformungen erhält man aus $A - \lambda I$ die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Eigenraum $E(\lambda)$ zu $\lambda = -1$ und dessen Dimension $\dim E(\lambda)$. Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Bestimmen Sie einen Eigenvektor v zum Eigenwert $\lambda = -1$.

Lösung zu Aufgabe 3.

- *(1.0 Punkte) Eigenraum* $E(\lambda) = \{s(1, -4, -1)^\top : s \in \mathbb{R}\}$
- *(1.0 Punkte) Dimension* $\dim E(\lambda) = 1$.
- *(1.0 Punkte) Achtung: Wähle* $s \neq 0$, *z.B. für* $s = 1$ *lautet der Eigenvektor* $v = (1, -4, -1)^\top$.

Aufgabe 4 (2 Punkte). Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A hat den algebraisch zweifachen Eigenwert $\lambda = -1$. Geben Sie für jeden der Vektoren u_1, u_2, u_3, u_4 an, ob es sich um einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = -1$, einen Hauptvektor zum Eigenwert $\lambda = -1$, oder um keines der beiden handelt. Begründen Sie Ihre Antworten!

Lösung zu Aufgabe 4.

- *(0.5 Punkte) Der Nullvektor u_1 ist per Definition weder Eigenvektor, noch Hauptvektor.*
- *(0.5 Punkte) u_2 ist ein Eigenvektor.*
- *(0.5 Punkte) u_4 ist ein Hauptvektor erster Stufe.*
- *(0.5 Punkte) u_3 ist weder noch: $(A - \lambda I)u_3 \neq 0$ und $(A - \lambda I)^2 u_3 \neq 0$. Info:*

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -6 & -1 & -2 \\ 12 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 (2 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine quadratische Matrix. Für Vektoren $f, g, h \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ sei

$$(A - \lambda I)f = g\,, \qquad (A - \lambda I)g = h\,, \qquad (A - \lambda I)h = \mathbf{0}\,.$$

(a) Geben Sie die Jordan'sche Normalform J von A und die Transformationsmatrix X an, für die die Zerlegung $XJX^{-1} = A$ gilt.

(b) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung zu Aufgabe 5.

- *(0.5 Punkte)* $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$
- *(0.5 Punkte)* $X = (h, g, f)$
- *(1.0 Punkte) mögliche Antworten:*

\+ *Nein, da J keine Diagonalmatrix.*

\+ *Nein, da geometrische Vielfachheit ungleich algebraische.*

\+ *Nein, da die Eigenvektoren von A keine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.*

Aufgabe 6 (6 Punkte). Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ in der Form

$$\left(A \mid b \right) = \left(\begin{array}{rrrrr|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & \alpha \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \delta \end{array}\right),$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Elementare Zeilenumformungen führen auf das System

$$\left(A' \mid b' \right) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & \beta + \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - \beta - 3\gamma - 3\delta \end{array}\right).$$

(a) Was ist der Rang von A? Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Welche Dimension hat das Bild von A? Geben Sie eine Basis von Bild von A an. Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Für welche Werte $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem $Ax = b$ eine Lösung? Wann hat es keine Lösung? Begründen Sie Ihre Antwort!

(d) Wie sieht die allgemeine Lösung von $Ax = b$ aus, falls sie existiert? Ist sie eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung zu Aufgabe 6.

(a)
- *(0.5 Punkte)* $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A')$, *weil elementare Zeilenumformungen das nicht ändern.*
- *(0.5 Punkte) Offensichtlich hat A' den Rang* 3.

(b)
- *(0.5 Punkte) Es gilt* $\dim \mathrm{Bild}(A) = \mathrm{Rang}(A) = 3$.
- *(0.5 Punkte) Die Spalten 1 + 3 + 4 von A' (und somit von A) sind lin. unabh.*
- *(0.5 Punkte) Basis korrekt hingeschrieben (von A, nicht von A'!)*

(c)
- *(0.5 Punkte) Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist lösbar, gdw.* $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A|b)$ *gilt.*
- *(0.5 Punkte) Es gilt* $\mathrm{Rang}(A|b) = \mathrm{Rang}(A'|b')$ *aufgrund elementarer Zeilenumformungen.*
- *(0.5 Punkte) Offensichtlich gilt* $\mathrm{Rang}(A'|b') = 4$ *genau dann, wenn* $\alpha - \beta - 3\gamma - 3\delta = 0$.
- *(0.5 Punkte) Also hat $Ax = b$ eine Lösung, gdw.* $\alpha - \beta - 3\gamma - 3\delta = 0$.

(d)
- *(0.5 Punkte) Mit Dimensionsformel gilt* $5 = \mathrm{Rang}(A) + \dim \mathrm{Kern}(A)$, *also* $\dim \mathrm{Kern}(A) = 2$.
- *(0.5 Punkte) Die allgemeine Lösung ist $x = x_p + x_0$, wobei $Ax_p = b$ und* $x_0 \in \mathrm{Kern}(A)$.
- *(0.5 Punkte) Da* $\mathrm{Kern}(A) \neq \{0\}$, *kann die Lösung nie eindeutig sein.*

Aufgabe 7 (4 Punkte). Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ in der Form

$$\left(\; A \mid b \;\right) = \left(\begin{array}{rrrrr|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & \alpha \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \delta \end{array}\right).$$

Elementare Zeilenumformungen führen auf das System

$$\left(\; A' \mid b' \;\right) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & \beta+\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-\beta-3\gamma-3\delta \end{array}\right).$$

(a) Bestimmen Sie Kern(A)? Begründen Sie Ihr Vorgehen / Ihre Rechnung!

(b) Welche Dimension hat Kern(A)? Ist Kern(A) ein Vektorraum? Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Was ist die Lösungsmenge von $Ax = b$ für $b = (0, 6, 0, -2)^\top$? Begründen Sie Ihre Antwort!

(d) Was ist die Lösungsmenge von $Ax = b$ für $b = (6, 0, 0, -2)^\top$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung zu Aufgabe 7.

(a)
- *(0.5 Punkte)* Kern(A) = Kern(A') *aufgrund elementarer Zeilenumformungen*
- *(0.5 Punkte)* $\mathrm{Kern}(A') = \left\{x \in \mathbb{R}^5 \;:\; x_4 = 0, \quad x_3 = -x_5, \quad x_2 = -(x_1 + x_5)\right\}$

(b)
- *(0.5 Punkte) Es gilt* $\dim \mathrm{Kern}(A') = 5 - \mathrm{Rang}(A') = 2$
- *(0.5 Punkte) Natürlich ist* Kern(A) *ein Vektorraum, doofe Frage!*

(c) *(1.0 Punkte)* $b = (0, 6, 0, -2)^\top$ *führt auf* $b' = (6, -2, 6, 0)^\top$. *Eine Partikulärlösung von* $Ax = b$ *erhält man durch Lösen von*

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \textit{also beispielsweise} \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit dieser ist die Lösungsmenge $x + \mathrm{Kern}(A)$

(d) *(1.0 Punkte)* $b = (6, 0, 0, -2)^\top$ *führt auf* $b' = (0, -2, 0, 12)^\top$, *d.h.* $b' \notin \mathrm{Bild}(A')$, *also* $b \notin \mathrm{Bild}(A)$. *Also ist die Lösungsmenge leer.*

Aufgabe 8 (4 Punkte). Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie Eigenwerte, Eigenvektoren und Hauptvektoren der Matrix A. Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten jedes Eigenwertes.

Lösung zu Aufgabe 8.

- *Berechnung der Eigenwerte:* $0 = p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^3$
  - *(0.5 Punkte)* $\lambda = 1$ *mit algebraischer Vielfachheit 3*
- *Berechnung der Eigenvektoren / Hauptvektoren:*
  - *(1.0 Punkte)*

$$(A - I)\boldsymbol{v} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  - *(1.0 Punkte)*

$$(A - I)\boldsymbol{h} = \boldsymbol{v}^{(1)} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{h}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

  - *(1.0 Punkte)*

$$(A - I)\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}^{(1)} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} t \\ 1/4 \\ -3/8 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{h}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \\ -3/8 \end{pmatrix}$$

- *(0.5 Punkte)* $\lambda = 1$ *mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 1*

Aufgabe 9 (2 Punkte). Wir betrachten das homogene System 1. Ordnung

$$\boldsymbol{y}'(t) - A\boldsymbol{y}(t) = 0$$

mit konstanter Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Geben Sie eine Formel für die allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}(t)$ des Systems in den folgenden Fällen an:

(a) A ist nicht diagonalisierbar und hat zwei unterschiedliche reelle Eigenwerte: λ_1 (mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1) und λ_2 (mit algebraischer Vielfachheit 1 und geometrischer Vielfachheit 1); $\boldsymbol{v}^{(1)}$ ist der Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 und $\boldsymbol{h}^{(1)}$ ist der zugehörige Hauptvektor; $\boldsymbol{v}^{(2)}$ ist der Eigenvektor zum Eigenwert λ_2.

(b) A ist diagonalisierbar mit drei unterschiedlichen reellen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und zugehörigen Eigenvektoren $\boldsymbol{v}^{(1)}$, $\boldsymbol{v}^{(2)}$, $\boldsymbol{v}^{(3)}$.

(c) A ist nicht diagonalisierbar und hat den Eigenwert λ (mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 1); $\boldsymbol{v}$ ist der Eigenvektor zum Eigenwert λ, $\boldsymbol{h}^{(1)}$ ist ein zugehöriger Hauptvektor erster Stufe und $\boldsymbol{h}^{(2)}$ ist ein zugehöriger Hauptvektor zweiter Stufe.

(d) A ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

aus Aufgabe 8.

Lösung zu Aufgabe 9.

(a) (0.5 Punkte) $\boldsymbol{y}_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}^{(1)} + c_2 e^{\lambda_1 t}(t\boldsymbol{v}^{(1)} + \boldsymbol{h}^{(1)}) + c_3 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}^{(2)}$ *mit* $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

(b) (0.5 Punkte) $\boldsymbol{y}_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}^{(2)} + c_3 e^{\lambda_3 t}\boldsymbol{v}^{(3)}$ *mit* $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

(c) (0.5 Punkte) $\boldsymbol{y}_h(t) = c_1 e^{\lambda t}\boldsymbol{v} + c_2 e^{\lambda t}(t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{h}^{(1)}) + c_3 e^{\lambda t}(t^2/2\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{h}^{(1)} + \boldsymbol{h}^{(2)})$ *mit* $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

(d) (0.5 Punkte) Formel aus (c) mit λ, $\boldsymbol{v}^{(1)}$, $\boldsymbol{h}^{(1)}$, $\boldsymbol{h}^{(2)}$ *aus Aufgabe 8*

Aufgabe 10 (4 Punkte). Gegeben ist das folgende lineare AWP 1. Ordnung:

$$\boldsymbol{y}'(t) - A\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t), \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0, \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ (mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1) und $\lambda_2 = 2$ (mit algebraischer Vielfachheit 1 und geometrischer Vielfachheit 1); $\boldsymbol{v}^{(1)} = (1,0,0)^T$ ist der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$ und $\boldsymbol{h}^{(1)} = (0,-1,1)^T$ ist der zugehörige Hauptvektor; $\boldsymbol{v}^{(2)} = (1,2,2)^T$ ist der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$.

(a) Geben Sie eine allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}_h(t)$ des homogenen Problems an.

(b) Geben Sie eine Partikulärlösung $\boldsymbol{y}_p(t)$ des inhomogenen Problems für $\boldsymbol{f}(t) = (2,1,0)^T e^t$ an. Verwenden Sie den Ansatz $\boldsymbol{y}_p(t) = \boldsymbol{a}\, e^t$ mit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$.

(c) Seien $\boldsymbol{y}_h(t)$ und $\boldsymbol{y}_p(t)$ die Lösungen aus (a) und (b). Wie müssen Sie $\boldsymbol{y}_h(t)$ und $\boldsymbol{y}_p(t)$ kombinieren, um die allgemeine Lösung des inhomogen Problems $\boldsymbol{y}'(t) - A\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t)$ zu erhalten? Von wie vielen freien Parametern hängt sie ab? Berechnen Sie die Lösung $\boldsymbol{y}(t)$ des AWPs für $\boldsymbol{y}_0 = (3,2,1)^T$.

(d) Geben Sie eine Lösung $\boldsymbol{y}(t)$ des homogenen AWPs für $\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{y}_0 = (1,0,1)^T$ an. Verwenden Sie Ihre Lösung aus (a) als Ansatz.

Lösung zu Aufgabe 10.

(a) (0.5 Punkte) $\boldsymbol{y}_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}^{(1)} + c_2 e^{\lambda_1 t}(t\boldsymbol{v}^{(1)} + \boldsymbol{h}^{(1)}) + c_3 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}^{(2)}$ *mit* $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

(b) (1.0 Punkte) $\boldsymbol{y}_p(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$

(c) (0.25 Punkte) $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}_p(t) + \boldsymbol{y}_h(t)$
(0.25 Punkte) 3 Parameter
(1.0 Punkte) $\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 + e^t + e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ -e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix}$ $(c_1 = 1,\ c_2 = 0,\ c_3 = 1)$

(d) (1.0 Punkte) $\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} 3/4 + t/2 + e^{2t}/4 \\ -1/2 + e^{2t}/2 \\ 1/2 + e^{2t}/2 \end{pmatrix}$ $(c_1 = 3/4,\ c_2 = 1/2,\ c_3 = 1/4)$

Aufgabe 11 (2 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix.

(a) Definieren Sie $\mathrm{Bild}(A)$.

(b) Sei $n = m$ und A bijektiv. Wie sieht das $\mathrm{Bild}(A)$ in diesem konkreten Fall aus und was ist seine Dimension?

Lösung zu Aufgabe 11.

- *(1.0 Punkte)* $\mathrm{Bild}(A) := \left\{y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } Ax = y\right\}$
- *(1.0 Punkte)* $\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{R}^n$ *und* $\dim(\mathrm{Bild}(A)) = n$.

Aufgabe 12 (2 Punkte). Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

(1) b ist eine Spalte von A

(2) $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(A|b)$

(3) A hat vollen Spalten- und Zeilenrang

(4) $\det(A) \neq 0$

(5) $b \in \operatorname{Bild}(A)$

(6) $\operatorname{Bild}(A) = \mathbb{R}^n$

(7) $b \in \operatorname{Kern}(A)$

(8) $\operatorname{Kern}(A) = \{0\}$

(9) $b \perp \operatorname{Kern}(A^\top)$

Beantworten Sie die folgenden Fragen:

(a) Sei $m < n$. Welche der obigen Aussagen (sofern sinnvoll) sind jeweils hinreichend dafür, dass das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung besitzt?

(b) Sei $n = m$. Welche der obigen Aussagen sind jeweils hinreichend dafür, dass das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ eine *eindeutige* Lösung besitzt?

Lösung zu Aufgabe 12.

- *(1.0 Punkte) Die Antworten: (5), (2), (9), (1)*
- *(1.0 Punkte) Die Antworten: (3), (4), (8), (6)*

Aufgabe 13 (3 Punkte). Sei V ein n-dimensionaler linearer Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$.

(a) Geben Sie die Definition eines *Unterraumes* U von V an.

(b) Geben Sie die Definition der *direkten Summe* zweier Unterräume U, W von V an.

(c) Sei V zusätzlich Euklidisch. Geben Sie die Definition des *Orthogonalraumes* eines Unterraumes U von V an.

(d) Formulieren Sie den Satz über die Bestapproximation im Euklidischen Vektorraum $(V, \|\cdot\| := \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle})$.

(e) Machen Sie zu (d) eine Skizze im $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.

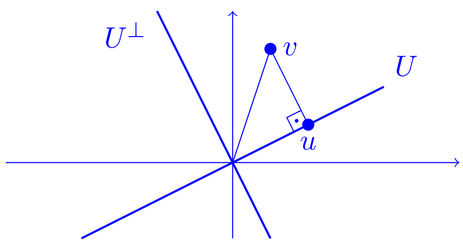
Lösung zu Aufgabe 13.

- *(0.5 Punkte) Eine nichtleere Teilmenge U eines Vektorraumes V, die mit der Einschränkung der Vektorraumoperationen auf U selbst ein Vektorraum ist, heißt Unterraum oder Teilraum von V.*
- *(0.5 Punkte) Ein Vektorraum V heißt direkte Summe der Unterräume U und W, wenn für jedes $\boldsymbol{v} \in V$ eindeutig bestimmte Elemente $\boldsymbol{u} \in U$ und $\boldsymbol{w} \in W$ existieren, so dass gilt: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$. Wir schreiben dafür symbolisch: $V = U \oplus W$.*
- *(0.5 Punkte) Sei V ein euklidischer Vektorraum und $U \subseteq V$. Dann heißt die Menge*

  $$U^{\perp} := \left\{\boldsymbol{x} \in V \,:\, \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{z} \text{ für alle } \boldsymbol{z} \in U\right\}$$

  der Orthogonalraum zu U.
- *(1.0 Punkte) Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum und $\boldsymbol{v} \in V$. Sei weiters $\boldsymbol{u} \in U$ die Orthogonalprojektion von $\boldsymbol{v}$. Dann ist $\boldsymbol{u}$ der eindeutig bestimmte Vektor in U, der den kleinsten Abstand von v hat. Es gilt:*

  $$\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\| = \min_{\boldsymbol{x} \in U} \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}\|$$

- *(0.5 Punkte)* 

Aufgabe 14 (2 Punkte). Vervollständigen Sie den folgenden Text:
Sei V ein Euklidischer Vektorraum der Dimension n und $B := \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ eine Basis von V.

- Die Basis B heißt *Orthogonalbasis* von V, falls $\boxed{}$ gilt.

- Die Basis B heißt *Orthonormalbasis* (ONB) von V, falls $\boxed{}$ gilt.

Falls B eine ONB ist, kann ein Vektor $\boldsymbol{v} \in V$ in dieser Basis als

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \boldsymbol{b}_i$$

dargestellt werden. Die v_i heißen $\boxed{}$ von $\boldsymbol{v}$ zur Basis B und können über $v_i = \boxed{}$ berechnet werden.

- *jeweils 0.5 Punkte:*
  Sei V ein Euklidischer Vektorraum der Dimension n und $B := \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ eine Basis von V.
  - *Die Basis B heißt* Orthogonalbasis *von V, falls* $\boxed{\langle \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j \rangle = 0 \text{ für alle } i \neq j}$ *gilt.*
  - *Die Basis B heißt* Orthonormalbasis *(ONB) von V, falls* $\boxed{\langle \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j \rangle = \delta_{ij}}$ *gilt.*

  Falls B eine ONB ist, kann ein Vektor $\boldsymbol{v} \in V$ in dieser Basis als

  $$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \boldsymbol{b}_i$$

  dargestellt werden. Die v_i heißen $\boxed{\text{Fourierkoeffizienten}}$ *von $\boldsymbol{v}$ zur Basis B und können über $v_i = \boxed{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}_i \rangle}$ berechnet werden.*

Aufgabe 15 (2 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Verbinden Sie in der folgenden Aufzählung Eigenschaften auf der linken Seite durch einen Implikationspfeil ($\Leftarrow$ oder $\Rightarrow$) mit der (den) jeweils passenden Eigenschaft(en) auf der rechten Seite, um insgesamt vier wahre Aussagen zu erhalten (*zusätzlich* zu beispielsweise 7. $\Longrightarrow$ 4.):

1. Es gibt eine orthonormale Eigenbasis
2. $\det(A) \geq 0$.
3. Für alle Eigenwerte gilt $|\lambda| = 1$
4. Für alle Eigenwerte gilt $\lambda \in \mathbb{R}$
5. A ist orthogonal
6. A ist singulär
7. A ist symmetrisch
8. A ist regulär

Lösung zu Aufgabe 15.

- *(jeweils 0.5 Punkte) Folgende vier Aussagen sind richtig:*
  5. $\Rightarrow$ 3., 7. $\Rightarrow$ 1., 3. $\Rightarrow$ 8., 6. $\Rightarrow$ 2.

Aufgabe 16 (1 Punkt). Geben Sie ein möglichst einfaches Beispiel einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für ein konkretes n an, die reelle Eigenwerte hat, aber nicht symmetrisch ist. Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis. Wählen Sie n nicht zu groß.

Lösung zu Aufgabe 16.

- *(1.0 Punkte) Einfachstes Beispiel: obere/untere Dreiecksmatrix, da Eigenwerte auf der Diagonale einer Dreiecksmatrix.*

$$z.B. \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Keine Begründung = keine Punkte*

Aufgabe 17 (1 Punkt). Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, welche einen algebraisch dreifachen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ hat. Dazu gibt es zwei linear unabhängige Eigenvektoren v_1 und v_2, sowie zu v_2 einen Hauptvektor h_2. Wie sehen die Matrizen $X, J \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ aus, mit denen man A mittels Jordan'scher Normalform als $A = XJX^{-1}$ darstellen kann?

Lösung zu Aufgabe 17.

- *(0.5 Punkte)* $X = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & h_2 \\ | & | & | \end{pmatrix}$
- *(0.5 Punkte)* $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Aufgabe 18 (3 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beantworten Sie die folgenden Fragen.

(a) Es gelte: Die lineare Abbildung $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$ ist nicht surjektiv. Was wissen Sie dadurch über die Eigenwerte von A?

(b) Es gelte: Die Spaltenvektoren von A erzeugen einen Teilraum des $\mathbb{R}^n$. Dann folgt

$$\det(A)\ \boxed{}\ 0.$$

Fügen Sie, falls möglich, die korrekte Antwort $\in \{\boxed{<}, \boxed{\leq}, \boxed{=}, \boxed{\neq}, \boxed{\geq}, \boxed{>}\}$ ein oder kreuzen Sie hier das Kästchen □ an, falls keine eindeutige Aussage getroffen werden kann!

(c) Es gelte: Die Matrix A ist diagonalisierbar bzw. diagonalähnlich. Was bedeutet das?

(d) Weshalb gilt die folgende Implikation?

$$\boxed{A = A^T \text{ und } x^T A x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^{n\times n} \setminus \{0\}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathrm{Spur}(A) > 0}$$

(e) Es gelte: $\det(A) = -9$. Dann folgt

$$\det(A^T A) = \boxed{}.$$

Fügen Sie die korrekte Antwort $\in \{\boxed{-81}, \boxed{-3}, \boxed{-1}, \boxed{0}, \boxed{1}, \boxed{3}, \boxed{81}, \boxed{\text{nicht berechenbar}}\}$ ein!

(f) Es gelte: Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gibt es höchstens ein $x \in \mathbb{R}^n$, sodass $Ax = y$. Welche hierzu äquivalente Aussage können Sie über die Eigenwerte von A treffen?

Lösung zu Aufgabe 18.

- *(0.5 Punkte) (a)* *Mindestes ein Eigenwert von A ist gleich Null.*
- *(0.5 Punkte) (b)* *Korrekte Antwort:* ☑ *bzw.* ☒
- *(0.5 Punkte) (c)* *"Sie ist zu einer Diagonalmatrix ähnlich" $\to$ 0 Punkte. Richtig: Es existiert Diagonalmatrix D und invertierbare Matrix X, sodass $A = XDX^{-1}$.*
- *(0.5 Punkte) (d)* *A symmetrisch und positiv definit $\Rightarrow$ alle Eigenwerte größer 0 $\Rightarrow$ da Spur gleich Summe der Eigenwerte,* $\mathrm{Spur}(A) > 0$
- *(0.5 Punkte) (e)* $\det(A^T A) = 81$
- *(0.5 Punkte) (f)* *Alle Eigenwerte von A sind ungleich Null.*

Aufgabe 19 (1 Punkt). Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & -14 \\ 6 & 19 & 10 & -45 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 19.

- *det* $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & -14 \\ 6 & 19 & 10 & -45 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \end{pmatrix} = \mathit{det} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & -14 \\ 0 & 1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \end{pmatrix} = \mathit{det} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & -14 \\ 0 & 1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = -42$ *(1 Punkt)*
- *die letzte Matrix muss Dreiecksgestalt haben (falls nicht → 0 Punkte)*
- *erster Rechenfehler* -0.5 *Punkte, alle weiteren* -0.25

Aufgabe 20 (1 Punkt). Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -24 & 93/9 \\ -3/27 & 3 & -80 & -39 \\ 0 & 0 & 7 & 1/3 \\ 0 & 0 & -4 & 5/6 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 20.

- $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & -24 & 93/9 \\ -3/27 & 3 & -80 & -39 \\ 0 & 0 & 7 & 1/3 \\ 0 & 0 & -4 & 5/6 \end{pmatrix} = 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -24 & 93/9 \\ 0 & 7 & 1/3 \\ 0 & -4 & 5/6 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 7 & 1/3 \\ -4 & 5/6 \end{pmatrix} = 43$

  (1 Punkt)
- *erster Schritt muss Entwicklung nach einer Zeile/Spalte sein (falls nicht → 0 Punkte), danach sowohl eine weitere Entwicklung nach Zeile/Spalte als auch Regel von Sarrus ok*
- *erster Rechenfehler* -0.5 *Punkte, alle weiteren* -0.25