Aufgabe 1 (6 Punkte):
Aufgabe 2 (5 Punkte):
Aufgabe 3 (3 Punkte):
Aufgabe 4 (2 Punkte):
Aufgabe 5 (3 Punkte):
Aufgabe 6 (2 Punkte):
Aufgabe 7 (2 Punkte):
Aufgabe 8 (4 Punkte):
Aufgabe 9 (2 Punkte):
Aufgabe 10 (4 Punkte):
Aufgabe 11 (1 Punkt):
Aufgabe 12 (3 Punkte):
Aufgabe 13 (1 Punkt):
Aufgabe 14 (1 Punkt):
Aufgabe 15 (2 Punkte):
Aufgabe 16 (2 Punkte):
Aufgabe 17 (3 Punkte):
Aufgabe 18 (2 Punkte):
Aufgabe 19 (2 Punkte):

Gesamtpunkte (50 Punkte):

Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Vorlesungsprüfung (150 Minuten)
VO Lineare Algebra für TPH

30. Januar 2020

- Tragen Sie bitte Ihre persönlichen Daten ein!
- Keine Verwendung schriftlicher Unterlagen!
- Einzeiliger, nicht programmierbarer Taschenrechner ist erlaubt!
- Schreiben Sie leserlich!
- Verwenden Sie einen Kugelschreiber für Ihre Lösungen, *keinen* Bleistift!

Aufgabe 1 (6 Punkte). Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ in der Form

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrrrr|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & \alpha \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \delta \end{array}\right),$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Elementare Zeilenumformungen führen auf das System

$$\left(\begin{array}{c|c} A' & b' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & \beta + \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - \beta - 3\gamma - 3\delta \end{array}\right).$$

(a) Wenn x eine Lösung von $Ax = b$ ist, gilt dann auch $A'x = b'$? Falls ja, gilt auch die Umkehrung? Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Was ist der Rang von A? Was ist der Rang von A'? Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Was ist der Rang von $\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right)$? Was ist der Rang von $\left(\begin{array}{c|c} A' & b' \end{array}\right)$? Begründen Sie Ihre Antwort in Abhängigkeit von $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$!

(d) Was ist die Dimension des Kerns von A? Was ist die Dimension des Kerns von A'? Begründen Sie Ihre Antwort!

(e) Geben Sie eine Basis vom Bild von A an. Ist die Basis eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort!

(f) Für welche Werte $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem $Ax = b$ eine Partikulärlösung? Begründen Sie Ihre Antwort!

(g) Ist die Lösung von $Ax = b$ gegebenenfalls eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung zu Aufgabe 1.

- *(1.0 Punkte) Elementare Zeilenumformungen ändern nichts an Rang / Kern, da die Zeilen linear kombiniert werden.*
- *(0.5 Punkte) Aufgrund linearer Kombination gilt $Ax = b$ genau dann, wenn $A'x = b'$.*
- *(0.5 Punkte) A und A' haben beide Rang 3, da Spalte 1 + 3 + 4 linear unabhängig (und 3 maximal)*
- *(0.5 Punkte) A und A' haben beide Kerndimension 2 (nach Dimensionsatz $5 = \mathrm{Rang}(A) + \dim \mathrm{Kern}(A) = 3 + \dim \mathrm{Kern}(A)$)*
- *(0.5 Punkte) $(A|b)$ und $(A'|b')$ haben genau dann Rang 3, wenn $\alpha - \beta - 3\gamma - 3\delta = 0$. Sonst Rang 4.*
- *(0.5 Punkte) Die Spalten 1 + 3 + 4 sind linear unabhängig, also eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$*
- *(0.5 Punkte) Basen sind nie eindeutig, man kann sie beispielsweise skalieren oder linear kombinieren*
- *(1.0 Punkte) Offensichtlich hat $A'x = b'$ (und damit $Ax = b$) genau dann eine Lösung, wenn $\alpha - \beta - 3\gamma - 3\delta = 0$. Genau in diesem Fall gilt $b \in \mathrm{Bild}(A)$, d.h. eine Partikulärlösung existiert.*
- *(1.0 Punkte) Nach Dimensionssatz gilt $5 = \mathrm{Rang}(A) + \dim \mathrm{Kern}(A) = 3 + \dim \mathrm{Kern}(A)$. Wegen $\mathrm{Kern}(A) \neq \{0\}$ kann die Lösung nicht eindeutig sein (1 Punkt).*

Aufgabe 2 (5 Punkte). Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ in der Form

$$\left(\ A \mid b\ \right) = \left(\begin{array}{rrrrr|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & \alpha \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \delta \end{array}\right).$$

Elementare Zeilenumformungen führen auf das System

$$\left(\ A' \mid b'\ \right) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & \beta+\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-\beta-3\gamma-3\delta \end{array}\right).$$

(a) Welches Gleichungssystem sollte man lösen, um den Kern von A zu bestimmen?

(b) Welche Dimension hat $\mathrm{Kern}(A)$? Berechnen Sie eine Basis für den Kern von A!

(c) Geben Sie mit Hilfe des Kerns für $b = (0, 6, 0, -2)^\top$ alle Lösungen von $Ax = b$ an!

(d) Geben Sie mit Hilfe des Kerns für $b = (6, 0, 0, -2)^\top$ alle Lösungen von $Ax = b$ an!

Lösung zu Aufgabe 2.

- *(1.0 Punkte) Nach Definition liefert Lösen des GLS* $Ax = 0$ *(oder besser* $A'x = 0$*) den Kern*
- *(1.0 Punkte)* $\dim \mathrm{Kern}(A) = 2$, *denn*
  - $\mathrm{Kern}(A) = \left\{x \in \mathbb{R}^5 \,:\, x_4 = 0, \quad x_3 = -x_5, \quad x_2 = -(x_1 + x_5)\right\}$
  - $\dim \mathrm{Kern}(A) = 5 - \mathrm{Rang}(A) = 2.$
- *(1.0 Punkte) Eine Basis ist beispielsweise*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathrm{Kern}(A),$$

  denn diese Vektoren sind linear unabhängig

- *(1.0 Punkte)* $b = (0, 6, 0, -2)^\top$ *führt auf* $b' = (6, -2, 6, 0)^\top$. *Eine Partikulärlösung von* $Ax = b$ *erhält man durch Lösen von*

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \textit{also beispielsweise} \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Mit dieser ist die Lösungsmenge $x + \mathrm{Kern}(A)$

- *(1.0 Punkte)* $b = (6, 0, 0, -2)^\top$ *führt auf* $b' = (0, -2, 0, 12)^\top$, *d.h.* $b' \notin \mathrm{Bild}(A')$, *also* $b \notin \mathrm{Bild}(A)$. *Also ist die Lösungsmenge leer.*

Aufgabe 3 (3 Punkte). Gegeben sei eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Sei λ^* ein Eigenwert von A. Die geometrische Vielfachheit von λ^* sei $g = g(\lambda^*) \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(a) Geben Sie eine Formel für das zu A gehörige charakteristische Polynom $p(\lambda)$ an.

(b) Formulieren Sie eine Gleichung, die der Eigenwert λ^* erfüllt.

(c) Welche Dimension hat der Eigenraum $E(\lambda^*)$ von λ^*?

Lösung zu Aufgabe 3.

- $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
- $p(\lambda^*) = 0$.
- *(ggf.* $Av = \lambda^* v$ *mit* $v \neq 0$ *auch OK)*
- *Dimension des Eigenraums* $\dim E(\lambda^*) = g$.

Aufgabe 4 (2 Punkte). Gegeben sei die quadratische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

und deren charakteristisches Polynom

$$p(\lambda) = -(\lambda+2)^2(\lambda-4).$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A sowie deren algebraische Vielfachheiten. Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung zu Aufgabe 4.

- *(1.0 Punkte) Die EW von A sind die Nullstellen von p*
- *(0.5 Punkte) Eigenwert $\lambda = 4$ mit algebraischer Vielfachheit 1*
- *(0.5 Punkte) Eigenwert $\lambda = -2$ mit algebraischer Vielfachheit 2.*

Aufgabe 5 (3 Punkte). Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

hat den algebraisch zweifachen Eigenwert $\lambda = -1$. Für $\lambda = -1$ betrachte man die Matrix

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mittels elementarer Zeilenumformungen erhält man aus $A - \lambda I$ die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Eigenraum $E(\lambda)$ zu $\lambda = -1$ und dessen Dimension $\dim E(\lambda)$. Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Bestimmen Sie einen Eigenvektor v zum Eigenwert $\lambda = -1$.

Lösung zu Aufgabe 5.

- *(1.0 Punkte) Eigenraum* $E(\lambda) = \{s(-3, -1, 1)^\top : s \in \mathbb{R}\}$
- *(1.0 Punkte) Dimension* $\dim E(\lambda) = 1$.
- *(1.0 Punkte) Achtung: Wähle* $s \neq 0$, *z.B. für* $s = 1$ *lautet der Eigenvektor* $v = (-3, -1, 1)^\top$.

Aufgabe 6 (2 Punkte). Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

hat den algebraisch zweifachen Eigenwert $\lambda = -1$. Betrachten Sie die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} -33 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie für jeden der Vektoren an, ob es sich um einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = -1$, einen Hauptvektor zum Eigenwert $\lambda = -1$, oder um keines der beiden handelt. Begründen Sie Ihre Antworten!

Lösung zu Aufgabe 6.

- *(0.5 Punkte) Der Nullvektor u_3 ist per Definition weder Eigenvektor, noch Hauptvektor.*
- *(0.5 Punkte) u_1 ist ein Eigenvektor.*
- *(0.5 Punkte) u_4 ist ein Eigenvektor.*
- *(0.5 Punkte) u_2 ist weder noch: $(A - \lambda I)u_2 \neq 0$ und $(A - \lambda I)^2 u_2 \neq 0$. Info:*

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 12 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7 (2 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine quadratische Matrix. Für Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ sei

$$(A - \lambda I)z = y\,, \qquad (A - \lambda I)y = x\,, \qquad (A - \lambda I)x = \mathbf{0}\,.$$

(a) Geben Sie die Jordan'sche Normalform J von A und die Transformationsmatrix X an, für die die Zerlegung $XJX^{-1} = A$ gilt.

(b) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung zu Aufgabe 7.

- *(0.5 Punkte)* $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$
- *(0.5 Punkte)* $X = (x, y, z)$
- *(1.0 Punkte) mögliche Antworten:*

\+ *Nein, da J keine Diagonalmatrix.*

\+ *Nein, da geometrische Vielfachheit ungleich algebraische.*

\+ *Nein, da die Eigenvektoren von A keine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.*

Aufgabe 8 (4 Punkte). Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie Eigenwerte, Eigenvektoren und Hauptvektoren der Matrix A.

Lösung zu Aufgabe 8.

- *Berechnung der Eigenwerte:* $\quad 0 = p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$
  - *(0.5 Punkte)* $\lambda_1 = 2$
  - *(0.5 Punkte)* $\lambda_2 = 1$
- *Berechnung der Eigenvektoren / Hauptvektoren:*
  - *(1.0 Punkte)*

$$(A-2I)\boldsymbol{v} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \; \textit{mit } t \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  - *(1.0 Punkte)*

$$(A-2I)\boldsymbol{h} = \boldsymbol{v}^{(1)} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \; \textit{mit } t \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{h}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  - *(1.0 Punkte)*

$$(A-I)\boldsymbol{v} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} \; \textit{mit } t \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9 (2 Punkte). Wir betrachten das homogene System 1. Ordnung

$$\boldsymbol{y}'(t) - A\boldsymbol{y}(t) = 0,$$

mit konstanter Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Geben Sie eine Formel für die allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}(t)$ des Systems in den folgenden Fällen an.

(a) A ist diagonalisierbar mit drei unterschiedlichen reellen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und zugehörigen Eigenvektoren $\boldsymbol{v}^{(1)}$, $\boldsymbol{v}^{(2)}$, $\boldsymbol{v}^{(3)}$.

(b) A ist nicht diagonalisierbar und hat zwei unterschiedliche reelle Eigenwerte: λ_1 (mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1) und λ_2 (mit algebraischer Vielfachheit 1 und geometrischer Vielfachheit 1); $\boldsymbol{v}^{(1)}$ ist der Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 und $\boldsymbol{h}^{(1)}$ ist der zugehörige Hauptvektor; $\boldsymbol{v}^{(2)}$ ist der Eigenvektor zum Eigenwert λ_2.

(c) A ist nicht diagonalisierbar und hat den Eigenwert λ (mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 1); $\boldsymbol{v}$ ist der Eigenvektor zum Eigenwert λ und $\boldsymbol{h}^{(1)}$, $\boldsymbol{h}^{(2)}$ sind die zugehörigen Hauptvektoren.

(d) A ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

aus Aufgabe 8.

Lösung zu Aufgabe 9.

(a) (0.5 Punkte) $\boldsymbol{y}_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}^{(2)} + c_3 e^{\lambda_3 t}\boldsymbol{v}^{(3)}$ *mit* $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

(b) (0.5 Punkte) $\boldsymbol{y}_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}^{(1)} + c_2 e^{\lambda_1 t}(t\boldsymbol{v}^{(1)} + \boldsymbol{h}^{(1)}) + c_3 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}^{(2)}$ *mit* $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

(c) (0.5 Punkte) $\boldsymbol{y}_h(t) = c_1 e^{\lambda t}\boldsymbol{v} + c_2 e^{\lambda t}(t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{h}^{(1)}) + c_3 e^{\lambda t}(t^2/2\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{h}^{(1)} + \boldsymbol{h}^{(2)})$ *mit* $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

(d) (0.5 Punkte) Formel aus (b) mit λ_1, λ_2, $\boldsymbol{v}^{(1)}$, $\boldsymbol{v}^{(2)}$, $\boldsymbol{h}^{(1)}$ *aus Aufgabe 8*

Aufgabe 10 (4 Punkte). Gegeben ist das folgende lineare AWP 1. Ordnung:

$$\boldsymbol{y}'(t) - A\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t), \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0,$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A hat den Eigenwert $\lambda = 1$ (mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 2). Die Eigenvektoren sind

$$\boldsymbol{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ mit dem zugehörigen Hauptvektor } \boldsymbol{h}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ und}$$

$$\boldsymbol{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie eine allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}_h(t)$ des homogenen Problems an.

(b) Geben Sie eine Partikulärlösung $\boldsymbol{y}_p(t)$ des inhomogenen Problems für

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t}$$

an. Verwenden Sie den Ansatz $\boldsymbol{y}_p(t) = \boldsymbol{a}\, e^{2t}$ mit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$.

(c) Seien $\boldsymbol{y}_h(t)$ und $\boldsymbol{y}_p(t)$ die Lösungen aus (a) und (b). Wie müssen Sie $\boldsymbol{y}_h(t)$ und $\boldsymbol{y}_p(t)$ kombinieren, um die allgemeine Lösung des inhomogen Problems $\boldsymbol{y}'(t) - A\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t)$ zu erhalten? Von wie vielen freien Parametern hängt sie ab? Bestimmen Sie die Werte der Parameter, um die Lösung $\boldsymbol{y}(t)$ des AWPs für

$$\boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

zu bekommen.

(d) Geben Sie eine Lösung $\boldsymbol{y}(t)$ des homogenen AWPs für

$$\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{0} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

an. Verwenden Sie Ihre Lösung aus (a) als Ansatz.

Lösung zu Aufgabe 10.

(a) *(0.5 Punkte)* $\boldsymbol{y}_h(t) = c_1 e^t \boldsymbol{v}^{(1)} + c_2 e^t (t\boldsymbol{v}^{(1)} + \boldsymbol{h}^{(1)}) + c_3 e^t \boldsymbol{v}^{(2)}$ *mit* $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

(b) *(1.0 Punkte)* $\boldsymbol{y}_p(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} e^{2t}$

(c) *(0.25 Punkte)* $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}_p(t) + \boldsymbol{y}_h(t)$
(0.25 Punkte) 3 Parameter
(1.0 Punkte) $\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} e^{2t} - 3te^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(c_1 = -2,\ c_2 = -3,\ c_3 = -1)$

(d) *(1.0 Punkte)* $\boldsymbol{y}(t) = \sqrt{2} e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(c_1 = \sqrt{2},\ c_2 = 0,\ c_3 = -\sqrt{2})$

Aufgabe 11 (1 Punkt). Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, welche einen algebraisch vierfachen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ hat. Dazu gibt es zwei linear unabhängige Eigenvektoren v_1 und v_2, sowie zu v_1 einen Hauptvektor h_1 und zu v_2 noch einen Hauptvektor h_2. Wie sehen die die Matrizen $X, J \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ aus, mit denen man A mittels Jordan'scher Normalform als $A = XJX^{-1}$ darstellen kann?

Lösung zu Aufgabe 11.

- *(0.5 Punkte)* $X = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ v_1 & h_1 & v_2 & h_2 \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$
- *(0.5 Punkte)* $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Aufgabe 12 (3 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beantworten Sie die folgenden Fragen.

(a) Es gelte: $\det(A) = 3$. Dann folgt

$$\det(A^T A) = \boxed{}.$$

Fügen Sie die korrekte Antwort $\in \{\boxed{0}, \boxed{1}, \boxed{3}, \boxed{6}, \boxed{9}, \boxed{27}, \boxed{42}, \boxed{\text{nicht berechenbar}}\}$ ein!

(b) Es gelte: Die Spaltenvektoren von A erzeugen einen echten Teilraum des $\mathbb{R}^n$. Dann folgt

$$\det(A) \boxed{} 0.$$

Fügen Sie den korrekten Vergleichsoperator $\in \{\boxed{<}, \boxed{\leq}, \boxed{=}, \boxed{\neq}, \boxed{\geq}, \boxed{>}, \boxed{\notin}, \boxed{\in}\}$ ein!

(c) Es gelte: Sei $n = 4$. Geben Sie ein Beispiel einer invertierbaren, aber nicht diagonalisierbaren Matrix A an. Begründen Sie Ihre Antwort!

(d) Es gelte: Die lineare Abbildung $f_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$ ist injektiv. Was wissen Sie dadurch über die Eigenwerte von A?

(e) Es gelte: Die lineare Abbildung $f_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$ ist surjektiv. Was wissen Sie dadurch über die Eigenwerte von A?

(f) Wie stehen die folgenden Aussagen zueinander?

$$\boxed{A = A^T \text{ und } x^T A x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^{n\times n} \setminus \{0\}} \quad \boxed{} \quad \boxed{\mathrm{Spur}(A) > 0}$$

Fügen Sie sie korrekte Beziehung ein! $(\boxed{\Rightarrow \text{ und } \not\Leftarrow}, \boxed{\not\Rightarrow \text{ und } \Leftarrow}, \boxed{\not\Rightarrow \text{ und } \not\Leftarrow}$, oder $\boxed{\Leftrightarrow})$

Lösung zu Aufgabe 12.

- *(0.5 Punkte) (a)* $\det(A^T A) = 9$
- *(0.5 Punkte) (b)* $det(A) = 0$
- *(0.5 Punkte) (c)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- *(0.5 Punkte) (d)* *Alle Eigenwerte von A sind ungleich Null.*
- *(0.5 Punkte) (e)* *Alle Eigenwerte von A sind ungleich Null.*
- *(0.5 Punkte) (f)* $\boxed{\Rightarrow \textit{ und } \not\Leftarrow}$

Aufgabe 13 (1 Punkt). Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 13.

- $\det \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 4 \det \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} + 5 \det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = -54$
  (1 Punkt)
- *pro Rechenfehler* -0.5 *Punkte*

Aufgabe 14 (1 Punkt). Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 14.

- $det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 54$ *(1 Punkt)*
- *pro Rechenfehler* -0.5 *Punkte*

Aufgabe 15 (2 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix.

(a) Definieren Sie $\operatorname{Kern}(A)$.

(b) Sei $n = m$ und A regulär. Wie sieht $\operatorname{Kern}(A)$ in diesem konkreten Fall aus und was ist seine Dimension?

Lösung zu Aufgabe 15.

- *(1.0 Punkte)* $\operatorname{Kern}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$
- *(1.0 Punkte)* $\operatorname{Kern}(A) = \{0\}$ *und* $\dim(\operatorname{Kern}(A)) = 0$.

Aufgabe 16 (2 Punkte). Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

(1) $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(A|b)$

(2) A hat vollen Rang

(3) $\det(A) \neq 0$

(4) b ist eine Spalte von A

(5) $\operatorname{Bild}(A) = \mathbb{R}^n$

(6) $b \in \operatorname{Kern}(A)$

(7) $b \perp \operatorname{Kern}(A^\top)$

(8) $\operatorname{Kern}(A) = \{0\}$

(9) $b \in \operatorname{Bild}(A)$

Beantworten Sie die folgenden Fragen:

(a) Sei $m < n$. Welche der obigen Aussagen (sofern sinnvoll) sind jeweils hinreichend dafür, dass das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung besitzt?

(b) Sei $n = m$. Welche der obigen Aussagen sind jeweils hinreichend dafür, dass das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ eine *eindeutige* Lösung besitzt?

Lösung zu Aufgabe 16.

- *(1.0 Punkte) Die Antworten: (9), (1), (7), (4)*
- *(1.0 Punkte) Die Antworten: (2), (3), (8), (5)*

Aufgabe 17 (3 Punkte). Sei V ein n-dimensionaler linearer Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$.

(a) Geben Sie die Definition eines *Unterraumes* U von V an.

(b) Geben Sie die Definition der *direkten Summe* zweier Unterräume U, W von V an.

(c) Sei V zusätzlich Euklidisch. Geben Sie die Definition des *Orthogonalraumes* eines Unterraumes U von V an.

(d) Formulieren Sie den Satz über die Bestapproximation im Euklidischen Vektorraum $(V, \|\cdot\| := \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle})$.

(e) Machen Sie zu (d) eine Skizze im $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.

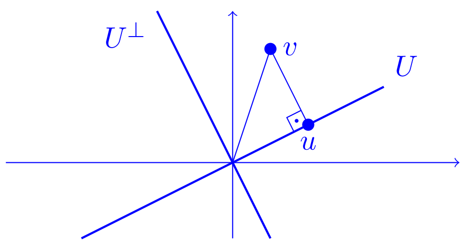
Lösung zu Aufgabe 17.

- *(0.5 Punkte) Eine nichtleere Teilmenge U eines Vektorraumes V, die mit der Einschränkung der Vektorraumoperationen auf U selbst ein Vektorraum ist, heißt Unterraum oder Teilraum von V.*
- *(0.5 Punkte) Ein Vektorraum V heißt direkte Summe der Unterräume U und W, wenn für jedes $\boldsymbol{v} \in V$ eindeutig bestimmte Elemente $\boldsymbol{u} \in U$ und $\boldsymbol{w} \in W$ existieren, so dass gilt: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$. Wir schreiben dafür symbolisch: $V = U \oplus W$.*
- *(0.5 Punkte) Sei V ein euklidischer Vektorraum und $U \subseteq V$. Dann heißt die Menge*

  $$U^\perp := \left\{\boldsymbol{x} \in V \,:\, \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{z} \text{ für alle } \boldsymbol{z} \in U\right\}$$

  der Orthogonalraum zu U.
- *(1.0 Punkte) Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum und $\boldsymbol{v} \in V$. Sei weiters $\boldsymbol{u} \in U$ die Orthogonalprojektion von $\boldsymbol{v}$. Dann ist $\boldsymbol{u}$ der eindeutig bestimmte Vektor in U, der den kleinsten Abstand von v hat. Es gilt:*

  $$\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\| = \min_{\boldsymbol{x} \in U} \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}\|$$

- *(0.5 Punkte)* 

Aufgabe 18 (2 Punkte). Vervollständigen Sie folgenden Text:

Sei V ein Euklidischer Vektorraum der Dimension n und $B := \{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ eine Basis von V.

- Die Basis B heißt *Orthogonalbasis* von V, falls $\boxed{}$ gilt.
- Die Basis B heißt *Orthonormalbasis* (ONB) von V, falls $\boxed{}$ gilt.

Falls B eine ONB ist, kann ein Vektor $\boldsymbol{v} \in V$ in dieser Basis als

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \boldsymbol{b}_i$$

dargestellt werden. Die v_i heißen $\boxed{}$ von $\boldsymbol{v}$ zur Basis B und können über $v_i = \boxed{}$ berechnet werden.

- *jeweils 0.5 Punkte:*
  Sei V ein Euklidischer Vektorraum der Dimension n und $B := \{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ eine Basis von V.
  - *Die Basis B heißt* Orthogonalbasis *von V, falls* $\boxed{\langle \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j \rangle = 0 \text{ für alle } i \neq j}$ *gilt.*
  - *Die Basis B heißt* Orthonormalbasis *(ONB) von V, falls* $\boxed{\langle \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j \rangle = \delta_{ij}}$ *gilt.*

  Falls B eine ONB ist, kann ein Vektor $\boldsymbol{v} \in V$ in dieser Basis als

  $$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \boldsymbol{b}_i$$

  dargestellt werden. Die v_i heißen $\boxed{\text{Fourierkoeffizienten}}$ *von $\boldsymbol{v}$ zur Basis B und können über $v_i =$* $\boxed{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}_i \rangle}$ *berechnet werden.*

Aufgabe 19 (2 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Verbinden Sie in der folgenden Aufzählung Eigenschaften auf der linken Seite durch einen Implikationspfeil ($\Leftarrow$ oder $\Rightarrow$) mit der (den) jeweils passenden Eigenschaft(en) auf der rechten Seite, um insgesamt vier wahre Aussagen zu erhalten (*zusätzlich* zu beispielsweise 2. $\Longrightarrow$ 7.):

1. A ist orthogonal
2. A ist symmetrisch
3. A ist singulär
4. A ist regulär
5. $\det(A) \geq 0$.
6. Für alle Eigenwerte gilt $|\lambda| = 1$
7. Für alle Eigenwerte gilt $\lambda \in \mathbb{R}$
8. Es gibt eine orthonormale Eigenbasis

Lösung zu Aufgabe 19.

- *(jeweils 0.5 Punkte) Folgende vier Aussagen sind richtig:*
  1. $\Rightarrow$ 6., 2. $\Rightarrow$ 8., 6. $\Rightarrow$ 4., 3. $\Rightarrow$ 5.

Aufgabe 20 (1 Punkt). Geben Sie ein möglichst einfaches Beispiel einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, deren Eigenwerte $|\lambda| = 1$ erfüllen, die aber nicht orthogonal ist. Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis. Wählen Sie n nicht zu groß.

Lösung zu Aufgabe 20.

- *(1.0 Punkte) Einfachstes Beispiel: obere/untere Dreiecksmatrix, da Eigenwerte auf der Diagonale einer Dreiecksmatrix.*

$$\textit{z.B.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$