Familienname:	Aufgabe 1 (5 Punkte): Aufgabe 2 (5 Punkte): Aufgabe 3 (4 Punkte):
Vorname:	Aufgabe 4 (5 Punkte): Aufgabe 5 (5 Punkte): Aufgabe 6 (6 Punkte): Aufgabe 7 (4 Punkte):
Matrikelnummer:	Aufgabe 8 (4 Punkte): Aufgabe 9 (4 Punkte): Aufgabe 10 (8 Punkte):
	Gesamtpunkte (50 Punkte):

PRÜFUNG
103.006 VO Lineare Algebra für TPH

02. Dezember 2021

- Es sind weder Taschenrechner noch Unterlagen erlaubt.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und dokumentieren Sie die Rechengänge vollständig, sauber und übersichtlich!
- Die Ausarbeitungen sind abzugeben und werden für die Bewertung herangezogen. Alle Zettel müssen mit Name und Matrikelnummer beschriftet werden.
- Die Arbeitszeit beträgt 120 Minuten.
- Alle schriftlichen Ausarbeitungen müssen am Ende der Prüfung digitalisiert und im TUWEL-Kurs der VO hochgeladen werden.
- Die Ergebnisse und der Termin der Einsichtnahme werden im TUWEL-Kurs der Vorlesung bekannt gegeben.

Aufgabe 1 (5 Punkte). Es seien p_1 und p_2 quadratische Polynome, gegeben durch

$$p_1(x) = -x^2 - x + 1, \qquad p_2(x) = 2x^2 + 2x + 2.$$

$U = \mathcal{L}(p_1, p_2)$ ist ein Unterraum des Polynomraumes $P = \{ax^2 + bx + c \colon a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $B = \{p_1, p_2\}$ eine Basis von U ist.

(b) Bestimmen Sie die Dimension von U.

(c) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass $q(x) = ax^2 - 2x + 6 \in U$ erfüllt ist.

(d) Berechnen Sie für q aus (c) den Koordinatenvektor $[q]_B$.

Lösung zu Aufgabe 1.

- (2 Punkte)
- (0.5 Punkte)
- (2 Punkte)
- (0.5 Punkte)

Aufgabe 2 (5 Punkte). Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ in der Form

$$\left(\, A \mid \boldsymbol{b} \, \right) = \left(\begin{array}{rrrr|c} -2 & 2 & 5 & -8 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \beta \\ -1 & -1 & 2 & -3 & \gamma \end{array} \right),$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Elementare Zeilenumformungen führen auf das System

$$\left(\, A' \mid \boldsymbol{b}' \, \right) = \left(\begin{array}{rrrr|c} -1 & 1 & 2 & -3 & \gamma \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - \beta - 2\gamma \end{array} \right).$$

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben und begründen Sie Ihre Antworten in Ihren Aufzeichnungen.

(a) Wenn $\boldsymbol{x}$ eine Lösung von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist, gilt dann auch $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$? Falls ja, gilt auch die Umkehrung?

(b) Was ist der Rang von A? Was ist der Rang von A'?

(c) Was ist der Rang von $\left(\, A \mid \boldsymbol{b} \, \right)$? Was ist der Rang von $\left(\, A' \mid \boldsymbol{b}' \, \right)$? Begründen Sie Ihre Antwort in Abhängigkeit von $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$!

(d) Was ist die Dimension des Kerns von A? Was ist die Dimension des Kerns von A'?

(e) Ist die Lösung von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ gegebenenfalls eindeutig?

Lösung zu Aufgabe 2.

- (1 Punkte)
- (0.5 + 0.5 Punkte)
- (1 Punkte)
- (0.5 + 0.5 Punkte)
- (1 Punkte)

Aufgabe 3 (4 Punkte).
Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der kanonischen Basis E_3. Eine weitere Basis von $\mathbb{R}^3$ sei gegeben durch $C = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3\}$ mit

$$\boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Transformationsmatrix $T_{E_3 \leftarrow C}$ des Basiswechsels von C zu E_3 sowie die Transformationsmatrix $T_{C \leftarrow E_3}$ des Basiswechsels von E_3 zu C.

Lösung zu Aufgabe 3.

- (2 Punkte)
- (2 Punkte)

Aufgabe 4 (5 Punkte). Gegeben ist die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sei jeweils mit der kanonischen Basis E_3 ausgestattet. Die Abbildung φ ist bezüglich der kanonischen Basen durch die Matrix A dargestellt als

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Matrix $A' = [\varphi(C)]_C$ bezüglich der Basis C, wobei die Transformationsmatrizen wiefolgt gegeben sind

$$T_{E_3 \leftarrow C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_{C \leftarrow E_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Fertigen Sie eine Skizze des Abbildungsdiagramms an.

(c) Gegeben sei der Vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = [\mathbf{v}]_{E_3}$. Berechnen Sie $[\varphi(\mathbf{v})]_C$.

Lösung zu Aufgabe 4.

- (2.5 Punkte)
- (0.5 Punkte)
- (2 Punkte)

Aufgabe 5 (5 Punkte). Sei $(V, \langle ., . \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum über $\mathbb{R}$.

(a) Definieren Sie mit Hilfe des Skalarprodukts $\langle ., . \rangle$ die Norm $\|\boldsymbol{x}\|$ eines Vektors $\boldsymbol{x}$. Zeigen Sie damit die Gültigkeit von

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = 2\left(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2\right), \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V.$$

(b) Geben Sie die Definition des Winkels $\alpha \in [0, \pi]$ zwischen zwei Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$, an.

(c) Zeigen Sie für $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$, unter Verwendung von (b), dass nur der Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ möglich ist.

Lösung zu Aufgabe 5.

- (2 Punkte)
- (0.5 Punkte)
- (1.5 Punkte)

Aufgabe 6 (6 Punkte). Gegeben sei eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Sei λ^* ein Eigenwert von A. Die geometrische Vielfachheit von λ^* sei $g = g(\lambda^*) \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(a) Geben Sie eine Formel für das zu A gehörige charakteristische Polynom $p(\lambda)$ an.

(b) Formulieren Sie eine Gleichung, die der Eigenwert λ^* erfüllt.

(c) Welche Dimension hat der Eigenraum $E(\lambda^*)$ von λ^*?

(d) Geben Sie eine Formel für das zu $detA$ mithilfe der Eigenwerte λ von A an.

(e) Kann $g \leq a$ gelten? Begründen Sie Ihre Antwort.

(f) Kann $a \leq g$ gelten? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Aufgabe 6.

- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)

Aufgabe 7 (4 Punkte). Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

hat den algebraisch zweifachen Eigenwert $\lambda = -1$. Betrachten Sie die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} -33 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie für jeden der Vektoren an, ob es sich um einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = -1$, einen Hauptvektor zum Eigenwert $\lambda = -1$, oder um keines der beiden handelt. Begründen Sie Ihre Antworten!

Lösung zu Aufgabe 7.

- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)

Aufgabe 8 (4 Punkte). Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist für $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A ohne diese Matrix explizit auszurechnen.

(b) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, sodass A singulär wird und begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Aufgabe 8.

- (2 Punkte)
- (2 Punkte)

Aufgabe 9 (4 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und achten Sie auf exakte Begründungen. Geben Sie ggf. ein Gegenbeispiel an.

(a) A ist singulär $\Longrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind 0

(b) A ist diagonalisierbar $\Longleftrightarrow$ alle Eigenwerte haben die algebraische Vielfachheit 1

(c) A ist diagonalisierbar $\Longleftrightarrow$ alle Eigenwerte haben die geometrische Vielfachheit 1

(d) Ist n ungerade, so hat A mindestens einen reellen Eigenwert

(e) A ist diagonalisierbar $\Longleftarrow$ A hat n verschiedene reelle Eigenwerte

(f) A ist orthogonal $\Longleftrightarrow$ $\det A = 1$

(g) A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind reell

(h) A ist symmetrisch $\Longrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind positiv

(k) A ist symmetrisch und indefinit $\Longrightarrow$ A hat mindestens einen positiven Eigenwert

(l) A hat n verschiedene reelle Eigenwerte $\Longleftarrow$ A ist diagonalisierbar

Lösung zu Aufgabe 9.

- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)

Aufgabe 10 (8 Punkte). Gegeben ist das lineare Anfangswertproblem 2. Ordnung der Form

$$B\,\boldsymbol{y}''(t) + C\,\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{k}(t), \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0, \quad \boldsymbol{y}'(0) = \boldsymbol{y}_1$$

mit

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{k}(t) = \cos(3t) \begin{pmatrix} 24 \\ 16 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Lösen Sie das verallgemeinerte Eigenwertproblem $(C - \lambda B)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$.

(b) Geben Sie die homogene Lösung des linearen Anfangswertproblems an.

(c) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung des AWP mit Hilfe eines Ansatzes.

(d) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems.

Lösung zu Aufgabe 10.

- (2 Punkte)
- (2 Punkte)
- (2 Punkte)
- (2 Punkte)