Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1 (6 Punkte):
Aufgabe 2 (4 Punkte):
Aufgabe 3 (10 Punkte):
Aufgabe 4 (4 Punkte):
Aufgabe 5 (8 Punkte):
Aufgabe 6 (4 Punkte):
Aufgabe 7 (3 Punkte):
Aufgabe 8 (3 Punkte):
Aufgabe 9 (8 Punkte):

Gesamtpunkte (50 Punkte):

PRÜFUNG
103.006 VO Lineare Algebra für TPH

07. Mai 2021

- Es sind weder Taschenrechner, noch Unterlagen erlaubt.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und dokumentieren Sie die Rechengänge vollständig, sauber und übersichtlich!
- Die Ausarbeitungen sind abzugeben und werden für die Bewertung herangezogen. Alle Zettel müssen mit Name und Matrikelnummer beschriftet werden.
- Die Arbeitszeit beträgt 120 Minuten.
- Alle schriftlichen Ausarbeitungen müssen am Ende der Prüfung digitalisiert und im TUWEL-Kurs der VO hochgeladen werden.
- Die Ergebnisse und der Termin der Einsichtnahme werden im TUWEL-Kurs der Vorlesung bekannt gegeben.

Aufgabe 1 (6 Punkte). Es sei $P = \{ax^2 + bx + c \colon a, b, c \in \mathbb{R}\}$ der Vektorraum quadratischer Polynome, ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx, \quad f, g \in P.$$

(a) Zeigen Sie, dass $B = \{x - 1, x + 1\}$ eine Basis des Unterraumes $U = \{ax + b \colon a, b \in \mathbb{R}\}$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Dimension von U und P.

(c) Berechnen Sie für $[q]_B = (1, -1)^T$ bezüglich der Basis B aus (a) den Vektor q.

(d) Berechnen Sie die Bestapproximation $u \in U$ von $v(x) = x^2$ unter Verwendung der ONB $B_0 = \{b_1, b_2\}$ von U, gegeben durch

$$b_1(x) = 1, \; b_2(x) = \tfrac{1}{\sqrt{3}}x.$$

Lösung zu Aufgabe 1.

- (2 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (2 Punkte)

Aufgabe 2 (4 Punkte). Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ in der Form

$$\left(A \mid \boldsymbol{b} \right) = \left(\begin{array}{rrrr|c} -2 & 2 & 5 & -8 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \beta \\ -1 & -1 & 2 & -3 & \gamma \end{array} \right),$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Elementare Zeilenumformungen führen auf das System

$$\left(A' \mid \boldsymbol{b}' \right) = \left(\begin{array}{rrrr|c} -1 & 1 & 2 & -3 & \gamma \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - \beta - 2\gamma \end{array} \right).$$

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben und begründen Sie Ihre Antworten in Ihren Aufzeichnungen.

(a) Wenn $\boldsymbol{x}$ eine Lösung von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist, gilt dann auch $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$? Falls ja, gilt auch die Umkehrung?

(b) Was ist der Rang von A? Was ist der Rang von A'?

(c) Was ist der Rang von $\left(A \mid \boldsymbol{b} \right)$? Was ist der Rang von $\left(A' \mid \boldsymbol{b}' \right)$? Begründen Sie Ihre Antwort in Abhängigkeit von $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$!

(d) Was ist die Dimension des Kerns von A? Was ist die Dimension des Kerns von A'?

(g) Ist die Lösung von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ gegebenenfalls eindeutig?

Lösung zu Aufgabe 2.

- (1.0 Punkte)
- (0.5 Punkte)
- (1.0 Punkte)
- (0.5 Punkte)
- (1.0 Punkte)

Aufgabe 3 (10 Punkte). Gegeben ist die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$. Die Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^4$ seien mit kanonischen Basen E_2 und E_4 ausgestattet. Die Abbildung φ ist bezüglich der kanonischen Basen durch die Matrix A dargestellt als

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \\ 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Weiters sind für $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^4$ die Basen C und B gegeben durch

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Berechnen Sie die Transformationsmatrix $T_{E_2 \leftarrow C}$ des Basiswechsels von C zu E_2 sowie die Transformationsmatrix $T_{B \leftarrow E_4}$ des Basiswechsels von E_4 zu B.

(b) Fertigen Sie eine Skizze des Abbildungsdiagramms an und berechnen Sie die Matrix $A' = [\varphi(C)]_B$ von φ bezüglich der Basen C und B.

(c) Gegeben sei der Vektor $\boldsymbol{v} = (1, -1)^T = [v]_{E_2}$. Berechnen Sie $\varphi(\boldsymbol{v})$ auf zwei verschiedene Arten, unter Benutzung von A und A'.

Lösung zu Aufgabe 3.

- (4 Punkte)
- (2 Punkte)
- (4 Punkte)

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum über $\mathbb{R}$.

(a) Definieren Sie mit Hilfe des Skalarprodukts $\langle .,. \rangle$ die Norm $\|\boldsymbol{x}\|$ eines Vektors $\boldsymbol{x}$. Zeigen Sie damit die Gültigkeit von

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \|\boldsymbol{y}\|^2, \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V.$$

(b) Geben Sie die Definition des Winkels $\alpha \in [0, \pi]$ zwischen zwei Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$, an.

(c) Zeigen Sie für $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ unter Verwendung von (b), dass für $\boldsymbol{x} = s\,\boldsymbol{y}$, nur die Winkel $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$ möglich sind.

Lösung zu Aufgabe 4.

- (2 Punkte)
- (0.5 Punkte)
- (1.5 Punkte)

Aufgabe 5 (8 Punkte). Gegeben ist eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie zum Eigenwert $\lambda = 2$ einen zugehörigen Eigenvektor.

(b) Zeigen Sie, dass $p(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda$ das charakteristische Polynom ist und berechnen Sie alle Eigenwerte.

(c) Begründen Sie, ob die Matrix A regulär oder singulär ist.

(d) Bestimmen Sie die Definitheit der Matrix A und begründen Sie diese.

(e) Berechnen Sie eine reguläre Matrix $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, welche die Matrix A diagonalisiert.

Lösung zu Aufgabe 5.

- (2 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (3 Punkte)

Aufgabe 6 (4 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und achten Sie auf exakte Begründungen. Geben Sie ggf. ein Gegenbeispiel an.

(a) A ist singulär $\Longrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind 0

(b) A ist diagonalisierbar $\Longleftrightarrow$ alle Eigenwerte haben die algebraische Vielfachheit 1

(c) A ist diagonalisierbar $\Longleftrightarrow$ alle Eigenwerte haben die geometrische Vielfachheit 1

(d) Ist n ungerade, so hat A mindestens einen reellen Eigenwert

(e) A ist diagonalisierbar $\Longleftarrow$ A hat n verschiedene reelle Eigenwerte

(f) A ist orthogonal $\Longleftrightarrow$ $\det A = 1$

(g) A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind reell

(h) A ist symmetrisch $\Longrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind positiv

(k) A ist symmetrisch und indefinit $\Longrightarrow$ A hat mindestens einen positiven Eigenwert

(l) A hat n verschiedene reelle Eigenwerte $\Longleftarrow$ A ist diagonalisierbar

Lösung zu Aufgabe 6.

- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)

Aufgabe 7 (3 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine quadratische Matrix. Für Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ sei

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}\,, \qquad (A - \lambda I)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\,, \qquad (A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\,.$$

(a) Geben Sie die Jordan'sche Normalform J von A und die Transformationsmatrix X an, für welche die Zerlegung $XJX^{-1} = A$ gilt.

(b) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung zu Aufgabe 7.

- (1 Punkte)
- (2 Punkte)

Aufgabe 8 (3 Punkte). Berechnen Sie die Determinante der reellen 4×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

auf zwei unterschiedliche Arten.

Lösung zu Aufgabe 8.

- (1 Punkte) Entwicklungssatz
- (2 Punkte) Transformation auf Dreiecksgestalt

Aufgabe 9 (8 Punkte). Gegeben ist das lineare Anfangswertproblem 2. Ordnung der Form

$$B\,\boldsymbol{y}''(t) + C\,\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{k}(t), \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0, \quad \boldsymbol{y}'(0) = \boldsymbol{y}_1$$

mit

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{k}(t) = \cos(3t) \begin{pmatrix} 24 \\ 16 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Lösen Sie das verallgemeinerte Eigenwertproblem $(C - \lambda B)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$.

(b) Geben Sie die homogene Lösung des linearen Anfangswertproblems an.

(c) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung des AWP mit Hilfe eines Ansatzes.

(d) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems.

Lösung zu Aufgabe 9.

- (2 Punkte)
- (2 Punkte)
- (2 Punkte)
- (2 Punkte)