Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Aufgabe 2 (4 Punkte):
Aufgabe 3 (10 Punkte):
Aufgabe 4 (5 Punkte):
Aufgabe 5 (8 Punkte):
Aufgabe 6 (4 Punkte):
Aufgabe 7 (3 Punkte):
Aufgabe 8 (3 Punkte):
Aufgabe 9 (8 Punkte):

Gesamtpunkte (50 Punkte):

PRÜFUNG
103.006 VO Lineare Algebra für TPH

19. Februar 2021

- Es sind weder Taschenrechner, noch Unterlagen erlaubt.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und dokumentieren Sie die Rechengänge vollständig, sauber und übersichtlich!
- Die Ausarbeitungen sind abzugeben und werden für die Bewertung herangezogen. Alle Zettel müssen mit Name und Matrikelnummer beschriftet werden.
- Die Arbeitszeit beträgt 120 Minuten.
- Alle schriftlichen Ausarbeitungen müssen am Ende der Prüfung digitalisiert und im TUWEL-Kurs der VO hochgeladen werden.
- Die Ergebnisse und der Termin der Einsichtnahme werden im TUWEL-Kurs der Vorlesung bekannt gegeben.

Aufgabe 1 (5 Punkte). Es seien p_1 und p_2 quadratische Polynome, gegeben durch

$$p_1(x) = -x^2 - x - 1, \qquad p_2(x) = 2x^2 + 2x + 2.$$

$U = \mathcal{L}(p_1, p_2)$ ist ein Unterraum des Polynomraumes $P = \{ax^2 + bx + c \colon a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $B = \{p_1, p_2\}$ eine Basis von U ist.

(b) Bestimmen Sie die Dimension von U.

(c) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass $q(x) = ax^2 - 2x + 6 \in U$ erfüllt ist.

(d) Berechnen Sie für q aus (c) den Koordinatenvektor $[q]_B$.

Lösung zu Aufgabe 1.

- (1 Punkte)
- (0.5 Punkte)
- (2 Punkte)
- (1.5 Punkte)

Aufgabe 2 (4 Punkte). Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

(1) $\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$

(2) $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}(A)$

(3) $\boldsymbol{b} \perp \mathrm{Kern}(A^\top)$

(4) A hat vollen Rang

(5) $\det(A) \neq 0$

(6) $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A|\boldsymbol{b})$

(7) $\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{R}^n$

(8) $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Kern}(A)$

(9) $\boldsymbol{b}$ ist eine Spalte von A

Beantworten Sie die folgenden Fragen:

(a) Sei $m < n$. Welche der obigen Aussagen sind jeweils hinreichend dafür, dass das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung besitzt?

(b) Sei $n = m$. Welche der obigen Aussagen sind jeweils hinreichend dafür, dass das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ eine *eindeutige* Lösung besitzt?

Lösung zu Aufgabe 2.

- (2 Punkte)
- (2 Punkte)

Aufgabe 3 (10 Punkte). Gegeben ist die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$. Die Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^4$ seien mit kanonischen Basen E_2 und E_4 ausgestattet. Die Abbildung φ ist bezüglich der kanonischen Basen durch die Matrix A dargestellt als

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \\ 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Weiters sind für $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^4$ die Basen C und B gegeben durch

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Berechnen Sie die Transformationsmatrix $T_{E_2 \leftarrow C}$ des Basiswechsels von C zu E_2 sowie die Transformationsmatrix $T_{B \leftarrow E_4}$ des Basiswechsels von E_4 zu B.

(b) Fertigen Sie eine Skizze des Abbildungsdiagramms an und berechnen Sie die Matrix $A' = [\varphi(C)]_B$ von φ bezüglich der Basen C und B.

(c) Gegeben sei der Vektor $\boldsymbol{v} = (1, -1)^T = [v]_{E_2}$. Berechnen Sie $\varphi(\boldsymbol{v})$ auf zwei verschiedene Arten, unter Benutzung von A und A'.

Lösung zu Aufgabe 3.

- (4 Punkte)
- (2 Punkte)
- (4 Punkte)

Aufgabe 4 (5 Punkte). Sei $(V, \langle ., . \rangle)$ ein euklidscher Vektorraum über $\mathbb{R}$.

(a) Definieren Sie mit Hilfe des Skalarprodukts $\langle ., . \rangle$, die Norm $\|\boldsymbol{x}\|$ eines Vektors $\boldsymbol{x}$. Zeigen Sie damit die Gültigkeit von

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \frac{1}{2}\left(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{y}\|^2\right), \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V.$$

(b) Definieren Sie den Winkel $\alpha \in [0, \pi]$ zwischen zwei Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$.

(c) Zeigen Sie für $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ unter Verwendung von (b), dass für $\boldsymbol{x} = s\,\boldsymbol{y}$, nur die Winkel $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$ möglich sind.

(d) Formulieren Sie den Satz über die Bestapproximation im euklidschen Vektorraum. Fertigen Sie für $V = \mathbb{R}^2$ und dem kanonischen Skalarprodukt eine Skizze an.

Lösung zu Aufgabe 4.

- (2 Punkte)
- (1 Punkte)
- (2 Punkte)
- (2 Punkte)

Aufgabe 5 (8 Punkte). Gegeben ist eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie zum Eigenwert $\lambda = 2$ einen zugehörigen Eigenvektor.

(b) Zeigen Sie, dass $p(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda$ das charakteristische Polynom ist und berechnen Sie alle Eigenwerte.

(c) Begründen Sie, ob die Matrix A regulär oder singulär ist.

(d) Bestimmen Sie die Definitheit der Matrix A und begründen Sie diese.

(e) Berechnen Sie eine reguläre Matrix $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, welche die Matrix A diagonalisiert.

Lösung zu Aufgabe 5.

- (2 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (3 Punkte)

Aufgabe 6 (4 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und achten Sie auf exakte Begründungen. Geben Sie ggf. ein Gegenbeispiel an.

(a) A ist singulär $\Longrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind 0

(b) A ist diagonalisierbar $\Longleftrightarrow$ alle Eigenwerte haben die algebraische Vielfachheit 1

(c) A ist diagonalisierbar $\Longleftrightarrow$ alle Eigenwerte haben die geometrische Vielfachheit 1

(d) Ist n ungerade, so hat A mindestens einen reellen Eigenwert

(e) A ist diagonalisierbar $\Longleftarrow$ A hat n verschiedene reelle Eigenwerte

(f) A ist orthogonal $\Longleftrightarrow$ $\det A = 1$

(g) A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind reell

(h) A ist symmetrisch $\Longrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind positiv

(k) A ist symmetrisch und indefinit $\Longrightarrow$ A hat mindestens einen positiven Eigenwert

(l) A hat n verschiedene reelle Eigenwerte $\Longleftarrow$ A ist diagonalisierbar

Lösung zu Aufgabe 6.

- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)

Aufgabe 7 (3 Punkte). Argumentieren Sie, ob die im Folgenden getroffenen Aussagen zutreffen oder nicht, d.h. ob diese Aussagen *wahr*, (**w**) oder *falsch*, (**f**) sind. Modifizieren Sie falsche Aussagen, sodass diese zutreffen und beantworten Sie ggf. weitere Fragen.
Gegeben sei eine reellwertige Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Diese Matrix A hat einen algebraisch dreifachen Eigenwert λ. Man findet dazu zwei konkrete linear unabhängige Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ und bestimmt einen Hauptvektor aus dem linearen Gleichungssystem $(A - \lambda I)\boldsymbol{h} = \boldsymbol{v}_1$.

(a) Es gilt

$$A = XJX^{-1} \quad \text{mit} \quad J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad X = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{v}_2 \\ | & | & | \end{pmatrix}.$$

(b) Die Vorgangsweise aus (a) ist immer möglich, d.h. es kann einen Hauptvektor immer aus dem linearen Gleichungssystem

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{h} = \boldsymbol{v}_1 \quad \text{oder} (A - \lambda I)\boldsymbol{h} = \boldsymbol{v}_2$$

bestimmt werden.

(c) Falls (b) falsch war: Wie lautet im Allgemeinen das Gleichungssystem zur Berechnung des Hauptvektors?

Lösung zu Aufgabe 7.

- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)

Aufgabe 8 (3 Punkte). Berechnen Sie die Determinante der reellen 4×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

auf zwei unterschiedliche Arten.

Lösung zu Aufgabe 8.

- (1 Punkte) Entwicklungssatz
- (2 Punkte) Transformation auf Dreeicksgestalt

Aufgabe 9 (8 Punkte). Gegeben ist das lineare Anfangswertproblem 1. Ordnung der Form

$$\boldsymbol{y}'(t) - A\,\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t), \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0,$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & -9 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(t) = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Weiters ist die Eigenwertstruktur von A gegeben wie folgt:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1\colon \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{h}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = 3\colon \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = -3\colon \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung des homogenen Problems an.

(b) Geben Sie eine Partikulärlösung des inhomogenen Problems an.

Hinweis. Benutzen Sie für die Partikulärlösung den Ansatz

$$\boldsymbol{y}_p(t) = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix},$$

wobei $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$ zu bestimmen sind.

(c) Bestimmen Sie zuerst die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems und geben Sie dann die eindeutige Lösung an, die dem AWP genügt.

Lösung zu Aufgabe 9.

- (2 Punkte)
- (4 Punkte)
- (2 Punkte)