Familienname:	Aufgabe 1 (6 Punkte):
	Aufgabe 2 (4 Punkte):
	Aufgabe 3 (10 Punkte):
Vorname:	Aufgabe 4 (4 Punkte):
	Aufgabe 5 (8 Punkte):
	Aufgabe 6 (4 Punkte):
Matrikelnummer:	Aufgabe 7 (3 Punkte):
	Aufgabe 8 (3 Punkte):
	Aufgabe 9 (8 Punkte):
	Gesamtpunkte (50 Punkte):

P R Ü F U N G
103.006 VO Lineare Algebra für TPH

19. März 2021

- Es sind weder Taschenrechner noch Unterlagen erlaubt.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und dokumentieren Sie die Rechengänge vollständig, sauber und übersichtlich!
- Die Ausarbeitungen sind abzugeben und werden für die Bewertung herangezogen. Alle Zettel müssen mit Name und Matrikelnummer beschriftet werden.
- Die Arbeitszeit beträgt 120 Minuten.
- Alle schriftlichen Ausarbeitungen müssen am Ende der Prüfung digitalisiert und im TUWEL-Kurs der VO hochgeladen werden.
- Die Ergebnisse und der Termin der Einsichtnahme werden im TUWEL-Kurs der Vorlesung bekannt gegeben.

Aufgabe 1 (6 Punkte). Es sei $P = \{ax^2 + bx + c\colon a, b, c \in \mathbb{R}\}$ der Vektorraum quadratischer Polynome, ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad f, g \in P.$$

(a) Zeigen Sie, dass $B = \{x - 1, x + 1\}$ eine Basis des Unterraumes $U = \{ax + b\colon a, b \in \mathbb{R}\}$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Dimension von U und P.

(c) Berechnen Sie für $[q]_B = (1, -1)^T$ bezüglich der Basis B aus (a) den Vektor q.

(d) Berechnen Sie die Bestapproximation $u \in U$ von $v(x) = x^2$ unter Verwendung der ONB $B_0 = \{b_1, b_2\}$ von U, gegeben durch

$$b_1(x) = 1,\ b_2(x) = \tfrac{1}{\sqrt{3}}x.$$

Lösung zu Aufgabe 1.

- (2 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (2 Punkte)

Aufgabe 2 (4 Punkte). Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

(1) $\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$

(2) $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}(A)$

(3) $\boldsymbol{b} \perp \mathrm{Kern}(A^\top)$

(4) A hat vollen Rang

(5) $\det(A) \neq 0$

(6) $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A|\boldsymbol{b})$

(7) $\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{R}^n$

(8) $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Kern}(A)$

(9) $\boldsymbol{b}$ ist eine Spalte von A

Beantworten Sie die folgenden Fragen:

(a) Sei $m < n$. Welche der obigen Aussagen (sofern sinnvoll) sind jeweils hinreichend dafür, dass das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung besitzt?

(b) Sei $n = m$. Welche der obigen Aussagen sind jeweils hinreichend dafür, dass das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ eine *eindeutige* Lösung besitzt?

Lösung zu Aufgabe 2.

- (2 Punkte)
- (2 Punkte)

Aufgabe 3 (10 Punkte). Gegeben ist die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$. Die Vektorräume $\mathbb{R}^4$ und $\mathbb{R}^2$ seien mit kanonischen Basen E_4 und E_2 ausgestattet. Die Abbildung φ ist bezüglich der kanonischen Basen durch die Matrix A gegeben als

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Weiters sind für $\mathbb{R}^4$ und $\mathbb{R}^2$ die Basen $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4\}$ und $C = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2\}$ gegeben durch

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Transformationsmatrix $T_{E_4 \leftarrow B}$ des Basiswechsels von B zu E_4 sowie die Transformationsmatrix $T_{C \leftarrow E_2}$ des Basiswechsels von E_2 zu C.

(b) Fertigen Sie eine Skizze des Abbildungsdiagramms an und berechnen Sie die Matrix $A' = [\varphi(B)]_C$ von φ bezüglich der Basen B und C.

(c) Gegeben sei der Vektor $\boldsymbol{v} = (1, 0, -1, 0)^T = [v]_{E_4}$. Berechnen Sie $[\varphi(\boldsymbol{v})]_C$ auf zwei verschiedene Arten, unter Verwendung von A und A'.

Lösung zu Aufgabe 3.

- (4 Punkte)
- (2 Punkte)
- (4 Punkte)

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum über $\mathbb{R}$.

(a) Definieren Sie mit Hilfe des Skalarprodukts $\langle .,. \rangle$ die Norm $\|\boldsymbol{x}\|$ eines Vektors $\boldsymbol{x}$. Zeigen Sie damit die Gültigkeit von

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = 2\left(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2\right), \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V.$$

(b) Geben Sie die Definition des Winkels $\alpha \in [0, \pi]$ zwischen zwei Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$, an.

(c) Zeigen Sie für $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$, unter Verwendung von (b), dass nur der Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ möglich ist.

Lösung zu Aufgabe 4.

- (2 Punkte)
- (0.5 Punkte)
- (1.5 Punkte)

Aufgabe 5 (8 Punkte). Gegeben ist eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie zum Eigenwert $\lambda = 1$ einen zugehörigen Eigenvektor v.

(b) Zeigen Sie, dass $p(\lambda) = -(\lambda - 1)^3$ das charakteristische Polynom von A darstellt und berechnen Sie alle Eigenwerte samt algebraischer Vielfachheit.

(c) Ermitteln Sie alle Eigenvektoren und mögliche Hauptvektoren der Matrix A.

(d) Berechnen Sie die Dimension aller Eigenräume. Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

(e) Geben Sie eine reguläre Matrix $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sowie die Matrix $J \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, sodass $A = XJX^{-1}$ gilt, wobei J die Jordan'sche Normalform von A bezeichnet.

Lösung zu Aufgabe 5.

- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (3 Punkte)
- (2 Punkte)
- (1 Punkte)

Aufgabe 6 (4 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und achten Sie auf exakte Begründungen. Geben Sie für falsche Aussagen ein Gegenbeispiel an.

(a) A ist singulär $\Longrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind 0

(b) A ist diagonalisierbar $\Longleftrightarrow$ alle Eigenwerte haben die algebraische Vielfachheit 1

(c) A ist diagonalisierbar $\Longleftrightarrow$ alle Eigenwerte haben die geometrische Vielfachheit 1

(d) Ist n ungerade, so hat A mindestens einen reellen Eigenwert

(e) A ist diagonalisierbar $\Longleftarrow$ A hat n verschiedene reelle Eigenwerte

(f) A ist orthogonal $\Longleftrightarrow$ $\det A = 1$

(g) A ist symmetrisch $\Longrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind reell

(h) A ist symmetrisch $\Longrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind positiv

(i) A ist symmetrisch und indefinit $\Longrightarrow$ A hat mindestens einen positiven Eigenwert

(j) A hat n verschiedene reelle Eigenwerte $\Longleftarrow$ A ist diagonalisierbar

(k) A ist diagonalisierbar $\Longrightarrow$ A hat n verschiedene reelle Eigenwerte

Lösung zu Aufgabe 6.

- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)

Aufgabe 7 (3 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine quadratische Matrix. Für Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ sei

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}\,, \qquad (A - \lambda I)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\,, \qquad (A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\,.$$

(a) Geben Sie die Jordan'sche Normalform J von A und die Transformationsmatrix X an, für welche die Zerlegung $XJX^{-1} = A$ gilt.

(b) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung zu Aufgabe 7.

- (1 Punkte)

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad X = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$

- (2 Punkte) Mögliche Antworten: (a) Nein, da J keine Diagonalmatrix. (b) Nein, da geometrische ungleich algebraischer Vielfachheit. (c) Nein, da die Eigenvektoren von A keine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe 8 (3 Punkte). Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist für $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A ohne diese Matrix explizit auszurechnen.

(b) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, sodass A singulär wird und begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Aufgabe 8.

- (1 Punkte) Mit $A = BC$ gilt $\det(A) = \det(BC) = \det B \det C$ und damit erhält man $\det A = ab$.
- (2 Punkte)

Aufgabe 9 (8 Punkte). Gegeben ist das lineare Anfangswertproblem 2. Ordnung der Form

$$B\,\boldsymbol{y}''(t) + C\,\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{k}(t), \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0, \quad \boldsymbol{y}'(0) = \boldsymbol{y}_1$$

mit

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{k}(t) = \cos(3t) \begin{pmatrix} 24 \\ 16 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Lösen Sie das verallgemeinerte Eigenwertproblem $(C - \lambda B)\boldsymbol{q} = \mathbf{0}$.

(b) Geben Sie die homogene Lösung des linearen Anfangswertproblems an.

(c) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung des AWP mit Hilfe eines Ansatzes.

(d) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems.

Lösung zu Aufgabe 9.

- (2 Punkte)
- (2 Punkte)
- (2 Punkte)
- (2 Punkte)