Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1 (6 Punkte):
Aufgabe 2 (4 Punkte):
Aufgabe 3 (6 Punkte):
Aufgabe 4 (5 Punkte):
Aufgabe 5 (4 Punkte):
Aufgabe 6 (7 Punkte):
Aufgabe 7 (3 Punkte):
Aufgabe 8 (3 Punkte):
Aufgabe 9 (4 Punkte):
Aufgabe 10 (8 Punkte):

Gesamtpunkte (50 Punkte):

P R Ü F U N G
103.006 VO Lineare Algebra für TPH

21. Oktober 2021

- Es sind weder Taschenrechner noch Unterlagen erlaubt.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und dokumentieren Sie die Rechengänge vollständig, sauber und übersichtlich!
- Die Ausarbeitungen sind abzugeben und werden für die Bewertung herangezogen. Alle Zettel müssen mit Name und Matrikelnummer beschriftet werden.
- Die Arbeitszeit beträgt 120 Minuten.
- Alle schriftlichen Ausarbeitungen müssen am Ende der Prüfung digitalisiert und im TUWEL-Kurs der VO hochgeladen werden.
- Die Ergebnisse und der Termin der Einsichtnahme werden im TUWEL-Kurs der Vorlesung bekannt gegeben.

Aufgabe 1 (6 Punkte). Es sei $P = \{ax^2 + bx + c\colon a, b, c \in \mathbb{R}\}$ der Vektorraum quadratischer Polynome, ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad f, g \in P.$$

(a) Zeigen Sie, dass $B = \{x-1, x+1\}$ eine Basis des Unterraumes $U = \{ax + b\colon a, b \in \mathbb{R}\}$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Dimension von U und P.

(c) Berechnen Sie für $[q]_B = (1, -1)^T$ bezüglich der Basis B aus (a) den Vektor q.

(d) Berechnen Sie die Bestapproximation $u \in U$ von $v(x) = x^2$ unter Verwendung der ONB $B_0 = \{b_1, b_2\}$ von U, gegeben durch

$$b_1(x) = 1,\ b_2(x) = \tfrac{1}{\sqrt{3}}x.$$

Lösung zu Aufgabe 1.

- (2 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (2 Punkte)

Aufgabe 2 (4 Punkte). Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

(1) $\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$

(2) $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}(A)$

(3) $\boldsymbol{b} \perp \mathrm{Kern}(A^\top)$

(4) A hat vollen Rang

(5) $\det(A) \neq 0$

(6) $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A|\boldsymbol{b})$

(7) $\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{R}^n$

(8) $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Kern}(A)$

(9) $\boldsymbol{b}$ ist eine Spalte von A

Beantworten Sie die folgenden Fragen:

(a) Sei $m < n$. Welche der obigen Aussagen (sofern sinnvoll) sind jeweils hinreichend dafür, dass das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung besitzt?

(b) Sei $n = m$. Welche der obigen Aussagen sind jeweils hinreichend dafür, dass das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ eine *eindeutige* Lösung besitzt?

Lösung zu Aufgabe 2.

- (2 Punkte)
- (2 Punkte)

Aufgabe 3 (6 Punkte). Gegeben ist die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sei jeweils mit der kanonischen Basis E_3 ausgestattet. Die Abbildung φ ist bezüglich der kanonischen Basen durch die Matrix A dargestellt als

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Matrix $A' = [\varphi(C)]_C$ bezüglich der Basis C, wobei die Transformationsmatrizen wiefolgt gegeben sind

$$T_{E_3 \leftarrow C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_{C \leftarrow E_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Fertigen Sie eine Skizze des Abbildungsdiagramms an.

(c) Gegeben sei der Vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = [\mathbf{v}]_{E_3}$. Berechnen Sie $[\varphi(\mathbf{v})]_C$.

Lösung zu Aufgabe 3.

- (3 Punkte)
- (1 Punkte)
- (2 Punkte)

Aufgabe 4 (5 Punkte). Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ ein euklidscher Vektorraum über $\mathbb{R}$.

(a) Definieren Sie mit Hilfe des Skalarprodukts $\langle .,. \rangle$, die Norm $\|\boldsymbol{x}\|$ eines Vektors $\boldsymbol{x}$. Zeigen Sie damit die Gültigkeit von

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \frac{1}{2} \left(\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{y}\|^2 \right), \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V.$$

(b) Definieren Sie den Winkel $\alpha \in [0, \pi]$ zwischen zwei Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$.

(c) Zeigen Sie für $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ unter Verwendung von (b), dass für $\boldsymbol{x} = s\,\boldsymbol{y}$, nur die Winkel $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$ möglich sind.

(d) Formulieren Sie den Satz über die Bestapproximation im euklidschen Vektorraum. Fertigen Sie für $V = \mathbb{R}^2$ und dem kanonischen Skalarprodukt eine Skizze an.

Lösung zu Aufgabe 4.

- (2 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)

Aufgabe 5 (4 Punkte).

(a) Bestimmen Sie jeweils den Abstand d und den Winkel α zwischen den angegebenen Vektoren im Sinne des angegebenen inneren Produkts.

$V = \mathbb{R}^3$, kanonisches inneres Produkt, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V = P_n$,

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x,\ p(x) = x^2,\ q(x) = x^3 + x$$

(b) Sei V ein Euklidischer Vektorraum der Dimension n und $B := \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ eine Basis von V.

Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit B eine Orthogonalbasis von V ist?

Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit B eine Orthonormalbasis (ONB) von V ist?

(b) Falls $B = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ eine ONB ist, kann ein Vektor $\boldsymbol{v} \in V$ in dieser Basis als

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \boldsymbol{b}_i$$

dargestellt werden? Wie werden die v_i genannt und wie können sie berechnet werden?

Lösung zu Aufgabe 5.

a)
- (0.5 Punkte)
- (0.5 Punkte)
- (0.5 Punkte)
- (0.5 Punkte)

b) (1 Punkte)

c) (1 Punkte)

Aufgabe 6 (7 Punkte). Gegeben ist eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie zum Eigenwert $\lambda = 2$ einen zugehörigen Eigenvektor.

(b) Zeigen Sie, dass $p(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda$ das charakteristische Polynom ist und berechnen Sie alle Eigenwerte.

(c) Begründen Sie, ob die Matrix A regulär oder singulär ist.

(d) Bestimmen Sie die Definitheit der Matrix A und begründen Sie diese.

(e) Berechnen Sie eine reguläre Matrix $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, welche die Matrix A diagonalisiert.

Lösung zu Aufgabe 6.

- (2 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (1 Punkte)
- (2 Punkte)

Aufgabe 7 (3 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beantworten Sie die folgenden Fragen.

(a) Es gelte: $\det(A) = 3$. Dann folgt

$$\det(A^T A) = \boxed{}.$$

Fügen Sie die korrekte Antwort $\in \{\boxed{0}, \boxed{1}, \boxed{3}, \boxed{6}, \boxed{9}, \boxed{27}, \boxed{42}, \boxed{\text{nicht berechenbar}}\}$ ein!

(b) Es gelte: Die Spaltenvektoren von A erzeugen einen echten Teilraum des $\mathbb{R}^n$. Dann folgt

$$\det(A) \boxed{} 0.$$

Fügen Sie den korrekten Vergleichsoperator $\in \{\boxed{<}, \boxed{\leq}, \boxed{=}, \boxed{\neq}, \boxed{\geq}, \boxed{>}, \boxed{\notin}, \boxed{\in}\}$ ein!

(c) Es gelte: Sei $n = 4$. Geben Sie ein Beispiel einer invertierbaren, aber nicht diagonalisierbaren Matrix A an. Begründen Sie Ihre Antwort!

(d) Es gelte: Die lineare Abbildung $f_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$ ist injektiv. Was wissen Sie dadurch über die Eigenwerte von A?

(e) Es gelte: Die lineare Abbildung $f_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$ ist surjektiv. Was wissen Sie dadurch über die Eigenwerte von A?

(f) Wie stehen die folgenden Aussagen zueinander?

$$\boxed{A = A^T \text{ und } x^T A x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^{n\times n} \setminus \{0\}} \quad \boxed{} \quad \boxed{\mathrm{Spur}(A) > 0}$$

Fügen Sie sie korrekte Beziehung ein! $\left(\boxed{\Rightarrow \text{ und } \not\Leftarrow}, \boxed{\not\Rightarrow \text{ und } \Leftarrow}, \boxed{\not\Rightarrow \text{ und } \not\Leftarrow}, \text{ oder } \boxed{\Leftrightarrow}\right)$

Lösung zu Aufgabe 7.

- (0.5 Punkte)
- (0.5 Punkte)
- (0.5 Punkte)
- (0.5 Punkte)
- (0.5 Punkte)
- (0.5 Punkte)
- (0.5 Punkte)

Aufgabe 8 (3 Punkte). Berechnen Sie die Determinante der reellen 4×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

auf zwei unterschiedliche Arten.

Lösung zu Aufgabe 8.

Aufgabe 9 (4 Punkte).

(a) Bestimmen Sie alle möglichen Jordan'schen Normalformen J einer beliebigen Normalformen J einer beliebigen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit charakteristischem Polynom $p(\lambda) = (\lambda-2)^4(\lambda-3)^1$.

(b) Sei $\boldsymbol{y}'(t) - A\boldsymbol{y}(t) = 0$ mit konstanter Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, wobei $A = XJX^{-1}$. Die Matrizen X und J seien gegeben durch

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Wählen Sie die richtige Lösung $\boldsymbol{y}(t)$ aus und begründen Sie Ihre Antwort in Ihren Aufzeichnungen:

- $\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}$
- $\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3+4t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}$
- $\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3-4t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}$
- $\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t}$

Lösung zu Aufgabe 9.

- (3 Punkte)
- (1 Punkte)

Aufgabe 10 (8 Punkte). Gegeben ist das lineare Anfangswertproblem 2. Ordnung der Form

$$B\,\boldsymbol{y}''(t) + C\,\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{k}(t), \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0, \quad \boldsymbol{y}'(0) = \boldsymbol{y}_1$$

mit

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{k}(t) = \cos(3t) \begin{pmatrix} 24 \\ 16 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Lösen Sie das verallgemeinerte Eigenwertproblem $(C - \lambda B)\boldsymbol{q} = \mathbf{0}$.

(b) Geben Sie die homogene Lösung des linearen Anfangswertproblems an.

(c) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung des AWP mit Hilfe eines Ansatzes.

(d) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems.

Lösung zu Aufgabe 10.

- (2 Punkte)
- (2 Punkte)
- (2 Punkte)
- (2 Punkte)