Familienname:	Aufgabe 1 (4 Punkte): Aufgabe 2 (8 Punkte): Aufgabe 3 (2 Punkte): Aufgabe 4 (5 Punkte):
Vorname:	Aufgabe 5 (3 Punkte): Aufgabe 6 (3 Punkte): Aufgabe 7 (5 Punkte): Aufgabe 8 (4 Punkte):
Matrikelnummer:	Aufgabe 9 (8 Punkte): Aufgabe 10 (8 Punkte):
	Gesamtpunkte (50 Punkte):

PRÜFUNG
103.006 VO Lineare Algebra für TPH

09. Februar 2022

- Es sind weder Taschenrechner noch Unterlagen erlaubt.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und dokumentieren Sie die Rechengänge vollständig, sauber und übersichtlich!
- Die Ausarbeitungen sind abzugeben und werden für die Bewertung herangezogen. Alle Zettel müssen mit Name und Matrikelnummer beschriftet werden.
- Die Arbeitszeit beträgt 120 Minuten.
- Alle schriftlichen Ausarbeitungen müssen am Ende der Prüfung digitalisiert und im TUWEL-Kurs der VO hochgeladen werden.
- Die Ergebnisse und der Termin der Einsichtnahme werden im TUWEL-Kurs der Vorlesung bekannt gegeben.

Aufgabe 1 (4 Punkte).

(a) Ergänzen Sie die Vektoren $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu einer Basis $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ des $\mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass der Vektor $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} a \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine Linearkombination der Vektoren $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ darstellt.

(c) Im $\mathbb{R}^3$ seien die kanonische Basis $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ und die Basis $B' = \{\boldsymbol{b}'_1, \boldsymbol{b}'_2, \boldsymbol{b}'_3\}$ mit

$\boldsymbol{b}'_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}'_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{b}'_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ gegeben.

Bestimmen Sie für den Vektor $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 19 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix}$ die Koordinatenvektoren $[\boldsymbol{v}]_E$ und $[\boldsymbol{v}]_{B'}$.

Lösung zu Aufgabe 1.

(a) (1 Punkte)

(b) (1 Punkte)

(c) (2 Punkte)

Aufgabe 2 (8 Punkte). Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5$ in der Form

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{b} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrrrr|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & \alpha \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \delta \end{array}\right),$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Elementare Zeilenumformungen führen auf das System

$$\left(\begin{array}{c|c} A' & \boldsymbol{b}' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrrrr|c} -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & \beta+\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3\delta - 3\gamma - \beta + \alpha \end{array}\right).$$

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben und begründen Sie Ihre Antworten in Ihren Aufzeichnungen.

(a) Wenn $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5$ eine Lösung von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist, gilt dann auch $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$? Falls ja, gilt auch die Umkehrung?

(b) Bestimmen Sie den Rang von A und den Rang von A'.

(c) Bestimmen Sie den Rang von $\left(\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{b} \end{array}\right)$ und den Rang von $\left(\begin{array}{c|c} A' & \boldsymbol{b}' \end{array}\right)$ in Abhängigkeit von $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

(d) Bestimmen Sie die Dimension des Kerns von A und die Dimension des Kerns von A'.

(e) Geben Sie eine Basis B vom Bild von A an. Ist die Basis eindeutig?

(f) Für welche Werte $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ eine Partikulärlösung?

(g) Falls eine Partikulärlösung von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ existiert, ist diese eindeutig?

Lösung zu Aufgabe 2.

(a) (1 Punkte)

(b) (1.5 Punkte)

(c) (2 Punkte)

(d) (1.5 Punkte)

(e) (1 Punkte)

(f) (0.5 Punkte)

(g) (0.5 Punkte)

Aufgabe 3 (2 Punkte). Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine injektive, lineare Abbildung.

Markieren Sie die äquivalenten Aussagen.

- Sei $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Dann hat $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ nur $\boldsymbol{x} = 0$ als Lösung.
- $\operatorname{Kern} \varphi = 0$.
- $\operatorname{Bild} \varphi = \mathbb{R}^m$.
- Sei $\boldsymbol{x} \in R^n$. Dann ist $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ lösbar.

Lösung zu Aufgabe 3.

- Pro richtiger Antwort, 1 Punkt

Aufgabe 4 (5 Punkte). Gegeben seien zwei lineare Abbildungen $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit den Abbildungsvorschriften

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1 + 8x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \psi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -6x_2 \\ 5x_1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Abbildungsmatrizen.

- $[\varphi(E_2)]_{E_2}$
- $[\psi(E_2)]_{E_2}$
- $[\varphi \circ \psi(E_2)]_{E_2}$
- $[\psi \circ \varphi(E_2)]_{E_2}$

Lösung zu Aufgabe 4.

- (0.5 Punkte)
- (0.5 Punkte)
- (2 Punkte)
- (2 Punkte)

Aufgabe 5 (3 Punkte). Berechnen Sie die Determinante der reellen 4×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

auf zwei unterschiedliche Arten.

Lösung zu Aufgabe 5.

- (1.5 Punkte)
- (1.5 Punkte)

Aufgabe 6 (3 Punkte). Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$.
Markieren Sie die richtigen Aussagen.

- Die Spalten von A sind linear unabhängig.
- Die Spalten von A sind normiert.
- $A \cdot A = I$.
- A ist regulär.

Lösung zu Aufgabe 6.

- 1 Punkt pro richtiger Antwort

Aufgabe 7 (5 Punkte). Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum über $\mathbb{R}$.

(a) Definieren Sie mit Hilfe des Skalarprodukts $\langle .,. \rangle$ die Norm $\|\boldsymbol{x}\|$ eines Vektors $\boldsymbol{x} \in V$. Zeigen Sie damit die Gültigkeit von

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \frac{1}{4} \left(\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 \right), \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V.$$

(b) Geben Sie die Definition des Winkels $\alpha = \sphericalangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in [0, \pi]$ zwischen zwei Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$, an.

(c) Zeigen Sie für $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ und $r, s \in \mathbb{R}_0^+$ unter Verwendung von (b), die Gültigkeit von

$$\sphericalangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sphericalangle(r\boldsymbol{x}, s\boldsymbol{y}).$$

Lösung zu Aufgabe 7.

(a) (2 Punkte)

(b) (1 Punkte)

(c) (2 Punkte)

Aufgabe 8 (4 Punkte). Betrachten Sie für $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ die Abbildung $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle := x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2 x_2 y_2.$$

Überprüfen Sie, ob die Abbildung $\langle .,. \rangle$ ein Skalarprodukt darstellt und begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung zu Aufgabe 8.

- (2 Punkte) Linearität in beiden Argumenten
- (1 Punkte) Symmetrie
- (1 Punkte) positive Definitheit

Aufgabe 9 (8 Punkte). Gegeben ist eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(a) Bestimmen Sie zum Eigenwert $\lambda = 1$ einen zugehörigen Eigenvektor $\boldsymbol{v}$.

(b) Zeigen Sie, dass $p(\lambda) = -(\lambda - 1)^3$ das charakteristische Polynom von A darstellt.

(c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte λ_i von A, sowie deren algebraische Vielfachheiten n_i.

(d) Ermitteln Sie alle Eigenvektoren und mögliche Hauptvektoren der Matrix A.

(e) Berechnen Sie die Dimension aller Eigenräume $E(\lambda_i)$.

(f) Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

(g) Geben Sie eine reguläre Matrix $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sowie die Matrix $J \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, sodass $A = XJX^{-1}$ gilt, wobei J die Jordansche Normalform von A bezeichnet.

Lösung zu Aufgabe 9.

(a) (1 Punkte)

(b) (1 Punkte)

(c) (1 Punkte)

(d) (1 Punkte)

(e) (1 Punkte)

(f) (1 Punkte)

(g) (2 Punkte)

Aufgabe 10 (8 Punkte). Gegeben ist das lineare Anfangswertproblem 1. Ordnung

$$\boldsymbol{y}'(t) + A\,\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t), \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0, \text{ mit } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A hat den Eigenwert $\lambda = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 2.

Die Eigenvektoren sind $\boldsymbol{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, mit dem zugehörigen Hauptvektor $\boldsymbol{h}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

und $\boldsymbol{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}_h(t)$ des homogenen Problems an.

(b) Geben Sie eine Partikulärlösung $\boldsymbol{y}_p(t)$ des inhomogenen Problems für $f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t}$ an.

Verwenden Sie den Ansatz $\boldsymbol{y}_p(t) = \boldsymbol{a}e^{2t}$ mit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$.

(c) Seien $\boldsymbol{y}_h(t)$ und $\boldsymbol{y}_p(t)$ die Lösungen aus (a) und (b).

Wie müssen Sie $\boldsymbol{y}_h(t)$ und $\boldsymbol{y}_p(t)$ kombinieren, um die allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}'(t) + A\,\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t)$ des inhomogenen Problems zu erhalten?

Von wie vielen freien Parametern hängt $\boldsymbol{y}(t)$ ab?

(d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems für $\boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(e) Geben Sie eine Lösung $\boldsymbol{y}(t)$ des homogenen AWPs für $\boldsymbol{f}(t) = 0$ und $\boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ an.

Verwenden Sie Ihre Lösung aus (a) als Ansatz.

Lösung zu Aufgabe 10.

(a) (1 Punkte)

(b) (2 Punkte)

(c) (1 Punkte)

(d) (2 Punkte)

(e) (2 Punkte)