Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1 (0 Punkte):	
Aufgabe 2 (5 Punkte):	
Aufgabe 3 (6 Punkte):	
Aufgabe 4 (3 Punkte):	
Aufgabe 5 (5 Punkte):	
Aufgabe 6 (3 Punkte):	
Aufgabe 7 (4 Punkte):	
Aufgabe 8 (6 Punkte):	
Aufgabe 9 (8 Punkte):	
Aufgabe 10 (4 Punkte):	
Aufgabe 11 (6 Punkte):	
Gesamtpunkte (50 Punkte):	

P R Ü F U N G
103.006 VO Lineare Algebra für TPH

11. Oktober 2022

Aufgabe 1 (0 Punkte).

- Es sind keine Unterlagen erlaubt.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und dokumentieren Sie die Rechengänge und Begründungen vollständig, sauber und übersichtlich! Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Die Ausarbeitungen sind abzugeben und werden für die Bewertung herangezogen, sofern es sich um Rechenaufgaben handelt oder Begründungen verlangt werden. Wird nach einer Begründung gefragt, so ist diese durch blauen Text gekennzeichnet. Ansonsten wird die getätigte Eingabe in MÖBIUS bewertet.
- Alle Zettel müssen mit Name und Matrikelnummer beschriftet werden.
- Die Arbeitszeit beträgt 120 Minuten.
- Alle schriftlichen Ausarbeitungen müssen am Ende der Prüfung digitalisiert (PDF-File) und im TUWEL-Kurs der VO hochgeladen werden.
- Die Ergebnisse und der Termin der Einsichtnahme werden im TUWEL-Kurs der Vorlesung bekannt gegeben und abgewickelt.

Aufgabe 2 (5 Punkte). Sei $V = \mathbb{R}^3$ und U gegeben durch

$$U = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : 2\,x + 5\,y + 4\,z = 0\} \subset V$$

(a) Welche der folgenden Axiome müssen erfüllt sein, damit U einen Unterraum von V bildet?

- $s \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{u} \in U:\ \ s \cdot \boldsymbol{u} \in U$
- $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U:\ \ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$
- $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U:\ \ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \in U$
- $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U:\ \ \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \in U$

(b) Wählen Sie eine Basis B von U aus und begründen Sie dies.

- $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-5}{4} \end{pmatrix} \right\}$
- $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

(c) Bestimmen Sie die Dimension von U.

(d) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} c \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in U$ gilt.

(e) Geben Sie den Koordinatenvektor $[\boldsymbol{v}]_B$ von $\boldsymbol{v}$ aus (d) bezüglich der Basis B aus (c) an.

Aufgabe 3 (6 Punkte). Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ durch

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 1 & \alpha - 2 & 2\alpha + 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ -\alpha^2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie alle $\alpha_i \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}$, für die das lineare Gleichungssystem lösbar ist.

(b) Berechnen Sie für $\alpha = 1$ die allgemeine Lösung des Gleichungssystem.

(c) Berechnen Sie den Rang von A und eine nichttriviale (d.h. $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$) Lösung $\boldsymbol{v}$ des homogenen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix A für $\alpha = -2$.

Aufgabe 4 (3 Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine injektive, lineare Abbildung.

Markieren Sie die äquivalenten Aussagen.

- Sei $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Dann hat $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ nur $\boldsymbol{x} = 0$ als Lösung.
- $\operatorname{Kern} \varphi = \{0\}$.
- $\operatorname{Bild} \varphi = \mathbb{R}^n$.
- Sei $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ lösbar.
- $\operatorname{Bild} \varphi = \{0\}$.
- $\operatorname{Kern} \varphi = \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 5 (5 Punkte). Gegeben sei die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Die Vektorräume $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ seien mit den kanonischen Basen E_3 und E_2 ausgestattet. Die Abbildung φ ist bezüglich der kanonischen Basen durch die Matrix A gegeben als

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Weiters sind für $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ die Basen $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4\}$ und $C = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2\}$ gegeben durch

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Gegeben sei der Vektor $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = [\boldsymbol{u}]_{E_3}$. Berechnen Sie also $[\varphi(\boldsymbol{u}]_{E_2}$.

(b) Stellen Sie die Vektoren aus **(a)** mithilfe der Basen B und C der. Berechnen Sie also $[\varphi(\boldsymbol{u}]_C$ und $[\boldsymbol{u}]_B$.

(c) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $\Phi = [\varphi(B)]_C$ bezüglich der Basen B und C.

Aufgabe 6 (3 Punkte). Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist für $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A ohne diese Matrix explizit auszurechnen.

(b) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, sodass A singulär wird und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7 (4 Punkte). Gegeben sei $V = \mathbb{R}^3$ mit dem kanonischen Skalarprodukt und ein Unterraum $U = \mathcal{L}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ mit $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis B des Unterraums $U = \mathcal{L}(\boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_2)$.

(b) Bestimmen Sie den Vektor $\boldsymbol{u} \in U$ so, dass die Norm $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\|_2$ für den Vektor $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ minimal wird.

(c) Berechnen Sie den Wert dieser Norm.

Aufgabe 8 (6 Punkte). Gegeben sei eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Sei λ ein Eigenwert von A. Die geometrische Vielfachheit von λ sei $g = g(\lambda) \in \{1, 2, \dots, n\}$. Die algebraische Vielfachheit von λ sei $a = a(\lambda) \in \{1, 2, \dots, n\}$.

(a) Geben Sie eine Formel für das zu A gehörige charakteristische Polynom p an.

(b) Formulieren Sie eine Gleichung, die der Eigenwert λ erfüllt.

(c) Welche Dimension hat der Eigenraum $E(\lambda)$ von λ?

(d) Geben Sie eine Formel für die Berechnung von $\det\ A$ mithilfe der Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A an.

(e) Kann $g \leq a$ gelten? Begründungen Sie ihre Antwort.

(f) Kann $a \leq g$ gelten? Begründungen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 9 (8 Punkte). Gegeben ist eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie zum Eigenwert $\lambda = 1$ einen zugehörigen Eigenvektor v.

(b) Zeigen Sie, dass $p(\lambda) = -(\lambda - 1)^3$ das charakteristische Polynom von A darstellt und berechnen Sie alle Eigenwerte samt algebraischer Vielfachheit.

(c) Ermitteln Sie alle Eigenvektoren und mögliche Hauptvektoren der Matrix A.

(d) Berechnen Sie die Dimension aller Eigenräume. Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

(e) Geben Sie eine reguläre Matrix $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sowie die Matrix $J \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, sodass $A = XJX^{-1}$ gilt, wobei J die Jordan'sche Normalform von A bezeichnet.

Aufgabe 10 (4 Punkte). Betrachten Sie das System von Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2, \\ y_2' &= y_2. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie für $\boldsymbol{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))^\top$ eine Fundamentalmatrix dieses Systems.

Aufgabe 11 (6 Punkte). Gegeben ist das lineare Anfangswertproblem 1. Ordnung

$$\boldsymbol{y}'(t) + A\,\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t), \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0, \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A hat den Eigenwert $\lambda_1 = 0$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 2, sowie den Eigenwert $\lambda_2 = 2$ mit algebraischer Vielfachheit 1 und geometrischer Vielfachheit 1. Die Eigenvektoren sind $\boldsymbol{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, mit dem zugehörigen Hauptvektor $\boldsymbol{h}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

und $\boldsymbol{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}_h(t)$ des homogenen Problems an.

(b) Geben Sie eine Partikulärlösung $\boldsymbol{y}_p(t)$ des inhomogenen Problems für $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ an. Verwenden Sie den Ansatz $\boldsymbol{y}_p(t) = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$.

(c) Seien $\boldsymbol{y}_h(t)$ und $\boldsymbol{y}_p(t)$ die Lösungen aus (a) und (b).
Wie müssen Sie $\boldsymbol{y}_h(t)$ und $\boldsymbol{y}_p(t)$ kombinieren, um die allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}'(t) + A\,\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t)$ des inhomogenen Problems zu erhalten? Von wie vielen freien Parametern hängt $\boldsymbol{y}(t)$ ab?

(d) Geben Sie eine Lösung $\boldsymbol{y}(t)$ des homogenen Anfangswertproblems für $\boldsymbol{f}(t) = 0$ und $\boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ an. Verwenden Sie Ihre Lösung aus (a) als Ansatz.