Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1 (6 Punkte):
Aufgabe 2 (10 Punkte):
Aufgabe 3 (5 Punkte):
Aufgabe 4 (3 Punkte):
Aufgabe 5 (3 Punkte):
Aufgabe 6 (3 Punkte):
Aufgabe 7 (8 Punkte):
Aufgabe 8 (4 Punkte):
Aufgabe 9 (2 Punkte):
Aufgabe 10 (6 Punkte):

Gesamtpunkte (50 Punkte):

PRÜFUNG
103.006 VO Lineare Algebra für TPH

17. Mai 2022

- Es sind keine Unterlagen erlaubt.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und dokumentieren Sie die Rechengänge und Begründungen vollständig, sauber und übersichtlich! Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Die Ausarbeitungen sind abzugeben und werden für die Bewertung herangezogen, sofern es sich um Rechenaufgaben handelt oder Begründungen verlangt werden. Wird nach einer Begründung gefragt, so ist diese durch blauen Text gekennzeichnet. Ansonsten wird die getätigte Eingabe in MÖBIUS bewertet.
- Alle Zettel müssen mit Name und Matrikelnummer beschriftet werden.
- Die Arbeitszeit beträgt 120 Minuten.
- Alle schriftlichen Ausarbeitungen müssen am Ende der Prüfung digitalisiert (PDF-File) und im TUWEL-Kurs der VO hochgeladen werden.
- Die Ergebnisse und der Termin der Einsichtnahme werden im TUWEL-Kurs der Vorlesung bekannt gegeben und abgewickelt.

Aufgabe 1 (6 Punkte). Es sei $P = \{ax^2 + bx + c\colon a, b, c \in \mathbb{R}\}$ der Vektorraum quadratischer Polynome, ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad f, g \in P.$$

(a) Zeigen Sie, dass $B = \{x - 1, x + 1\}$ eine Basis des Unterraumes $U = \{ax + b\colon a, b \in \mathbb{R}\}$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Dimension von U und P.

(c) Berechnen Sie für $[q]_B = (1, -1)^T$ bezüglich der Basis B aus (a) den Vektor q.

(d) Berechnen Sie die Bestapproximation $u \in U$ von $v(x) = x^2$ unter Verwendung der ONB $B_0 = \{b_1, b_2\}$ von U, gegeben durch

$$b_1(x) = 1,\ b_2(x) = \tfrac{1}{\sqrt{3}}x.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte). Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5$ in der Form

$$\left(\; A \mid \boldsymbol{b} \;\right) = \left(\begin{array}{rrrrr|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & \alpha \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \delta \end{array}\right),$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Elementare Zeilenumformungen führen auf das System

$$\left(\; A' \mid \boldsymbol{b}' \;\right) = \left(\begin{array}{rrrrr|c} -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & \beta + \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3\delta - 3\gamma - \beta + \alpha \end{array}\right).$$

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben und begründen Sie Ihre Antworten in Ihren Aufzeichnungen.

(a) Wenn $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5$ eine Lösung von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist, gilt dann auch $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$? Falls ja, gilt auch die Umkehrung?

(b) Bestimmen Sie den Rang von A und den Rang von A'.

(c) Bestimmen Sie den Rang von $\left(\; A \mid \boldsymbol{b} \;\right)$ und den Rang von $\left(\; A' \mid \boldsymbol{b}' \;\right)$ in Abhängigkeit von $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

(d) Geben Sie eine Basis B vom Bild von A an. Ist die Basis eindeutig?

(e) Für welche Werte $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ eine Partikulärlösung?

(f) Bestimmen Sie die Dimension des Kerns von A und die Dimension des Kerns von A'.

(g) Berechnen Sie eine Basis K vom Kern von A.

(h) Falls eine Partikulärlösung von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ existiert, ist diese eindeutig?

(i) Berechnen Sie für $\alpha = \beta = 12$ und $\gamma = \delta = 0$ eine mögliche Partikulärlösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5$. Geben Sie mit den bisher gefundenen Informationen die allgemeine Lösung in diesem konkreten Fall an.

Aufgabe 3 (5 Punkte). Gegeben ist die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sei jeweils mit der kanonischen Basis E_3 ausgestattet. Die Abbildung φ ist bezüglich der kanonischen Basen durch die Matrix A dargestellt als

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Matrix $A' = [\varphi(C)]_C$ bezüglich der Basis C, wobei die Transformationsmatrizen wiefolgt gegeben sind

$$T_{E_3 \leftarrow C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_{C \leftarrow E_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Fertigen Sie eine Skizze des Abbildungsdiagramms an.

(c) Gegeben sei der Vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = [\mathbf{v}]_{E_3}$. Berechnen Sie $[\varphi(\mathbf{v})]_C$.

Aufgabe 4 (3 Punkte). Berechnen Sie die Determinante der reellen 4×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

auf zwei unterschiedliche Arten.

Aufgabe 5 (3 Punkte). Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$.
Markieren Sie die richtigen Aussagen.

- Die Spalten von A sind linear unabhängig.
- Die Spalten von A sind bezüglich der euklidischen Norm normiert.
- $A \cdot A = I$.
- A ist regulär.

Aufgabe 6 (3 Punkte). Sei V ein euklidischer Vektorraum und $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$.

(a) Wählen Sie die definierenden Eigenschaften einer Norm

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

aus:

- $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$
- $\|s\boldsymbol{x}\| = |s|\|\boldsymbol{x}\|, \; s \in \mathbb{R}$
- $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0$
- $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$
- $\|\boldsymbol{x}\| = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$
- $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| > \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$
- $\|s\boldsymbol{x}\| = s^2\|\boldsymbol{x}\|, \; s \in \mathbb{R}$

(b) Betrachten Sie die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|.$$

Welche Voraussetzung muss erfüllt sein, damit Gleichheit gilt?

- $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$
- $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ linear abhängig
- $\boldsymbol{x} \parallel \boldsymbol{y}$
- $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq 0$

Aufgabe 7 (8 Punkte). Gegeben ist eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie zum Eigenwert $\lambda = 1$ einen zugehörigen Eigenvektor v.

(b) Zeigen Sie, dass $p(\lambda) = -(\lambda - 1)^3$ das charakteristische Polynom von A darstellt und berechnen Sie alle Eigenwerte samt algebraischer Vielfachheit.

(c) Ermitteln Sie alle Eigenvektoren und mögliche Hauptvektoren der Matrix A.

(d) Berechnen Sie die Dimension aller Eigenräume. Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

(e) Geben Sie eine reguläre Matrix $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sowie die Matrix $J \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, sodass $A = XJX^{-1}$ gilt, wobei J die Jordan'sche Normalform von A bezeichnet.

Aufgabe 8 (4 Punkte). Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

und die Vektoren

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A hat den algebraischen zweifachen Eigenwert $\lambda = -1$. Geben Sie für jeden der Vektoren $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ an, ob es sich um einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = -1$, einen Hauptvektor zum Eigenwert $\lambda = -1$, oder um keines der beiden handelt. Begründen Sie Ihre Antworten in Ihren Aufzeichnungen!

Aufgabe 9 (2 Punkte). Betrachten Sie das System von Differentialgleichungen der Form

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_1 + y_2, \\
y_2' &= y_1 - y_2.
\end{aligned}
$$

Welches Fundamentalsystem ist die korrekte Lösung?

- $\left\{ e^{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, e^{-\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$
- $\left\{ e^{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}, e^{-2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} \right\}$
- $\left\{ e^{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, e^{-2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$
- $\left\{ e^{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}, e^{-\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} \right\}$

Aufgabe 10 (6 Punkte). Gegeben ist das lineare Anfangswertproblem 1. Ordnung

$$\boldsymbol{y}'(t) - A\,\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t), \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0, \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A hat den Eigenwert $\lambda = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 2.

Die Eigenvektoren sind $\boldsymbol{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, mit dem zugehörigen Hauptvektor $\boldsymbol{h}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

und $\boldsymbol{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}_h(t)$ des homogenen Problems an.

(b) Geben Sie eine Partikulärlösung $\boldsymbol{y}_p(t)$ des inhomogenen Problems für $f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ an. Verwenden Sie den Ansatz $\boldsymbol{y}_p(t) = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$.

(c) Seien $\boldsymbol{y}_h(t)$ und $\boldsymbol{y}_p(t)$ die Lösungen aus (a) und (b).
Wie müssen Sie $\boldsymbol{y}_h(t)$ und $\boldsymbol{y}_p(t)$ kombinieren, um die allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}'(t) + A\,\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t)$ des inhomogenen Problems zu erhalten? Von wie vielen freien Parametern hängt $\boldsymbol{y}(t)$ ab?

(d) Geben Sie eine Lösung $\boldsymbol{y}(t)$ des homogenen Anfangswertproblems für $\boldsymbol{f}(t) = 0$ und $\boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ an. Verwenden Sie Ihre Lösung aus (a) als Ansatz.