Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1 (5 Punkte):	
Aufgabe 2 (4 Punkte):	
Aufgabe 3 (5 Punkte):	
Aufgabe 4 (5 Punkte):	
Aufgabe 5 (3 Punkte):	
Aufgabe 6 (3 Punkte):	
Aufgabe 7 (6 Punkte):	
Aufgabe 8 (3 Punkte):	
Aufgabe 9 (8 Punkte):	
Aufgabe 10 (2 Punkte):	
Aufgabe 11 (6 Punkte):	
Gesamtpunkte (50 Punkte):	

P R Ü F U N G
103.006 VO Lineare Algebra für TPH

22. März 2022

- Es sind keine Unterlagen erlaubt.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und dokumentieren Sie die Rechengänge und Begründungen vollständig, sauber und übersichtlich! Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Die Ausarbeitungen sind abzugeben und werden für die Bewertung herangezogen, sofern es sich um Rechenaufgaben handelt oder Begründungen verlangt werden. Wird nach einer Begründung gefragt, so ist diese durch blauen Text gekennzeichnet. Ansonsten wird die getätigte Eingabe in MÖBIUS bewertet.
- Alle Zettel müssen mit Name und Matrikelnummer beschriftet werden.
- Die Arbeitszeit beträgt 120 Minuten.
- Alle schriftlichen Ausarbeitungen müssen am Ende der Prüfung digitalisiert (PDF-File) und im TUWEL-Kurs der VO hochgeladen werden.
- Die Ergebnisse und der Termin der Einsichtnahme werden im TUWEL-Kurs der Vorlesung bekannt gegeben und abgewickelt.

Aufgabe 1 (5 Punkte). Es seien p_1 und p_2 quadratische Polynome, gegeben durch

$$p_1(x) = -x^2 - x + 1, \qquad p_2(x) = 2x^2 + 2x + 2.$$

$U = \mathcal{L}(p_1, p_2)$ ist ein Unterraum des Polynomraumes $P = \{ax^2 + bx + c \colon a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $B = \{p_1, p_2\}$ eine Basis von U ist.

(b) Bestimmen Sie die Dimension von U.

(c) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass $q(x) = ax^2 - 2x + 6 \in U$ erfüllt ist.

(d) Berechnen Sie für q aus (c) den Koordinatenvektor $[q]_B$.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

(1) $\operatorname{Kern}(A) = \{0\}$

(2) $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}(A)$

(3) $\boldsymbol{b} \perp \operatorname{Kern}(A^\top)$

(4) A hat vollen Rang

(5) $\det(A) \neq 0$

(6) $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(A|\boldsymbol{b})$

(7) $\operatorname{Bild}(A) = \mathbb{R}^n$

(8) $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Kern}(A)$

(9) $\boldsymbol{b}$ ist eine Spalte von A

Beantworten Sie die folgenden Fragen:

(a) Sei $m < n$. Welche der obigen Aussagen sind jeweils hinreichend dafür, dass das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung besitzt?

(b) Sei $n = m$. Welche der obigen Aussagen sind jeweils hinreichend dafür, dass das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ eine *eindeutige* Lösung besitzt?

Aufgabe 3 (5 Punkte).
Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der kanonischen Basis E_3. Eine weitere Basis von $\mathbb{R}^3$ sei gegeben durch $C = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3\}$ mit

$$\boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Transformationsmatrix $T_{E_3 \leftarrow C}$ des Basiswechsels von C zu E_3 sowie die Transformationsmatrix $T_{C \leftarrow E_3}$ des Basiswechsels von E_3 zu C.

Aufgabe 4 (5 Punkte). Gegeben sei die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Die Vektorräume $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ seien mit den kanonischen Basen E_3 und E_2 ausgestattet. Die Abbildung φ ist bezüglich der kanonischen Basen durch die Matrix A gegeben als

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Weiters sind für $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ die Basen $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4\}$ und $C = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2\}$ gegeben durch

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Gegeben sei der Vektor $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = [\boldsymbol{u}]_{E_3}$. Berechnen Sie also $[\varphi(\boldsymbol{u}]_{E_2}$.

(b) Stellen Sie die Vektoren aus **(a)** mithilfe der Basen B und C der. Berechnen Sie also $[\varphi(\boldsymbol{u}]_C$ und $[\boldsymbol{u}]_B$.

(c) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $\Phi = [\varphi(B)]_C$ bezüglich der Basen B und C.

Aufgabe 5 (3 Punkte). Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist für $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A ohne diese Matrix explizit auszurechnen.

(b) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, sodass A singulär wird und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6 (3 Punkte). Sei V ein euklidischer Vektorraum und $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$.

(a) Wählen Sie die definierenden Eigenschaften eines allgemeinen Skalarprodukts

$$\langle ., . \rangle : \; V \times V \to \mathbb{R}$$

aus:

- $\langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \rangle$
- $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$
- $\langle s\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = s^2 \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle, \; s \in \mathbb{R}$
- $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$
- $\langle s\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = s \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle, \; s \in \mathbb{R}$
- $\langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$
- $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0$
- $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sqrt{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle}$

(b) Betrachten Sie den Satz von Pythagoras

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_2^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2.$$

Wählen Sie die richtige Voraussetzung für diesen Satz aus:

- $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$
- $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \neq 0$
- $\boldsymbol{x} \parallel \boldsymbol{y}$
- $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq 0$

Aufgabe 7 (6 Punkte). Gegeben sei $V = \mathbb{R}^3$ mit dem kanonischen Skalarprodukt und ein Unterraum $U = \mathcal{L}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ mit $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie den Vektor $\boldsymbol{u} \in U$ so, dass die Norm $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\|_2$ für den Vektor $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ minimal wird.

(b) Berechnen Sie den Wert dieser Norm.

Aufgabe 8 (3 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Beantworten Sie die folgenden Fragen.

(a) Es gelte: $\det(A) = 3$. Dann folgt

$$\det(A^T A) = \boxed{}.$$

Fügen Sie die korrekte Antwort $\in \{\boxed{0}, \boxed{1}, \boxed{3}, \boxed{6}, \boxed{9}, \boxed{27}, \boxed{42}, \boxed{\text{nicht berechenbar}}\}$ ein!

(b) Es gelte: Die Spaltenvektoren von A erzeugen einen echten Teilraum des $\mathbb{R}^n$. Dann folgt

$$\det(A) \boxed{} 0.$$

Fügen Sie den korrekten Vergleichsoperator $\in \{\boxed{<}, \boxed{\leq}, \boxed{=}, \boxed{\neq}, \boxed{\geq}, \boxed{>}, \boxed{\notin}, \boxed{\in}\}$ ein!

(c) Es gelte: Sei $n = 4$. Geben Sie ein Beispiel einer invertierbaren, aber nicht diagonalisierbaren Matrix A an. Begründen Sie Ihre Antwort!

(d) Es gelte: Die lineare Abbildung $f_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$ ist injektiv. Was wissen Sie dadurch über die Eigenwerte von A?

(e) Es gelte: Die lineare Abbildung $f_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$ ist surjektiv. Was wissen Sie dadurch über die Eigenwerte von A?

(f) Wie stehen die folgenden Aussagen zueinander?

$$\boxed{A = A^T \text{ und } x^T A x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^{n \times n} \setminus \{0\}} \quad \boxed{} \quad \boxed{\mathrm{Spur}(A) > 0}$$

Fügen Sie sie korrekte Beziehung ein! $\left(\boxed{\Rightarrow \text{ und } \not\Leftarrow}, \boxed{\not\Rightarrow \text{ und } \Leftarrow}, \boxed{\not\Rightarrow \text{ und } \not\Leftarrow}, \text{ oder } \boxed{\Leftrightarrow}\right)$

Aufgabe 9 (8 Punkte). Gegeben ist eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie zum Eigenwert $\lambda = 2$ einen zugehörigen Eigenvektor.

(b) Zeigen Sie, dass $p(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda$ das charakteristische Polynom ist und berechnen Sie alle Eigenwerte.

(c) Begründen Sie, ob die Matrix A regulär oder singulär ist.

(d) Bestimmen Sie die Definitheit der Matrix A und begründen Sie diese.

(e) Berechnen Sie eine reguläre Matrix $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, welche die Matrix A diagonalisiert.

Aufgabe 10 (2 Punkte). Betrachten Sie das System von Differentialgleichungen der Form

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_1 + y_2,\\
y_2' &= y_1 - y_2.
\end{aligned}
$$

Welches Fundamentalsystem ist die korrekte Lösung?

- $\left\{e^{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, e^{-\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}$
- $\left\{e^{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}, e^{-2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}\right\}$
- $\left\{e^{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, e^{-2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}$
- $\left\{e^{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}, e^{-\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}\right\}$

Aufgabe 11 (6 Punkte). Gegeben ist das lineare Anfangswertproblem 1. Ordnung

$$\boldsymbol{y}'(t) + A\,\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t), \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0, \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A hat den Eigenwert $\lambda_1 = 0$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 2, sowie den Eigenwert $\lambda_2 = 2$ mit algebraischer Vielfachheit 1 und geometrischer Vielfachheit 1. Die Eigenvektoren sind $\boldsymbol{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, mit dem zugehörigen Hauptvektor $\boldsymbol{h}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, und $\boldsymbol{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}_h(t)$ des homogenen Problems an.

(b) Geben Sie eine Partikulärlösung $\boldsymbol{y}_p(t)$ des inhomogenen Problems für $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ an. Verwenden Sie den Ansatz $\boldsymbol{y}_p(t) = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$.

(c) Seien $\boldsymbol{y}_h(t)$ und $\boldsymbol{y}_p(t)$ die Lösungen aus (a) und (b).
Wie müssen Sie $\boldsymbol{y}_h(t)$ und $\boldsymbol{y}_p(t)$ kombinieren, um die allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}'(t) + A\,\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t)$ des inhomogenen Problems zu erhalten? Von wie vielen freien Parametern hängt $\boldsymbol{y}(t)$ ab?

(d) Geben Sie eine Lösung $\boldsymbol{y}(t)$ des homogenen Anfangswertproblems für $\boldsymbol{f}(t) = 0$ und $\boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ an. Verwenden Sie Ihre Lösung aus (a) als Ansatz.